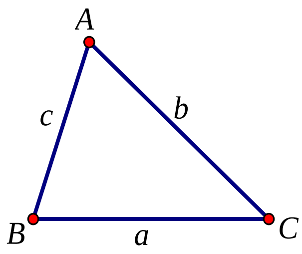
§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định lí côsin: Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$. Ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$



Hình 2.6

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2. Định lí sin : Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến: Cho tam giác ABC với m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C. Ta có :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta kí hiệu h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB; R, r

lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác; S là diện tích tam giác. Khi đó ta có:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{abc}{4R}$$
$$= pr$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(công thức Hê–rông)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp.

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $A = 30^0$, $B = 45^0$.

Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $C = 180^0 - A - B = 180^0 - 30^0 - 45^0 = 105^0$

Theo định lí sin ta có $a = 2R\sin A = 2.3.\sin 30^0 = 3$,

$b = 2R\sin B = 2.3.\sin 45^0 = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R\sin C = 2.3.\sin 105^0 \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \approx \frac{2\left(18 + 5,796^2\right) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow r = \frac{bc\sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5,796\sin 30^0}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Biết

$AB = 3$, $BC = 8$, $\cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC.

Lời giải (hình 2.7)

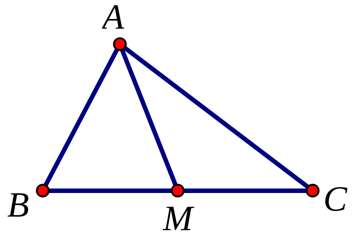
$BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí côsin ta có

$$\cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.AB}$$

Suy ra $\frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{2.4.x}$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{13} \\ x = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$



Hình 2.7

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{2AB.AC}$$

TH1: Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \frac{2\left(3^2 + AC^2\right) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$.

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{9 + 49 - 64}{2.3.7} = -\frac{1}{7}$$

Suy ra $A \approx 98^0 12'$

TH2: Nếu $x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \frac{49}{13} = \frac{2\left(3^2 + AC^2\right) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{397}{13}}$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{9 + \frac{397}{13} - 64}{2.3.\sqrt{\frac{397}{13}}} = -\frac{53}{\sqrt{5161}}$$

Suy ra $A \approx 137^0 32'$

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 1$. Giả sử E là trung điểm AB và thỏa mãn $\sin BDE = \frac{1}{3}$.

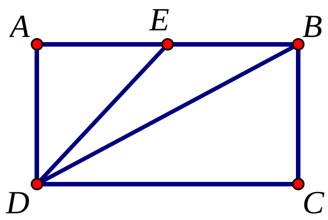
Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải (hình 2.8)

Đặt $AB = 2x \; \left(x > 0\right) \Rightarrow AE = EB = x$.

Vì góc BDE nhọn nên $\cos BDE > 0$ suy ra

$$\cos BDE = \sqrt{1 - \sin^2 BDE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



Hình 2.8

Theo định lí Pitago ta có:

$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 1 + x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{1 + x^2}$

$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow BD = \sqrt{4x^2 + 1}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDE ta có

$$\cos BDE = \frac{DE^2 + DB^2 - EB^2}{2DE.DB} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4x^2 + 2}{2\sqrt{\left(1 + x^2\right)\left(4x^2 + 1\right)}}$$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Do $x > 0$)

Vậy độ dài cạnh AB là $\sqrt{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.56: Cho tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $ACB = 60^0$. Tính cạnh BC.

Bài 2.57: Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1$. Trên tia đối của AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Giả sử $CBD = 30^0$. Tính AC.

Bài 2.58. Cho $a = x^2 + x + 1; b = 2x + 1; c = x^2 - 1$. Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó có một góc bằng 120^0

Bài 2.59: Cho tam giác ABC có $AB = 3,\ AC = 7,\ BC = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

c) Tính đường đường cao kẻ từ đỉnh A.

Bài 2.60: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{2c}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

a) Tính các góc của tam giác.

b) Cho $a = 2\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2.61: Cho tam giác ABC có $A = 60^0,\ a = 10,\ r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính R

b) Tính b, c

Bài 2.62: Cho tam giác ABC có $AB = 10,\ AC = 4$ và $A = 60^0$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính $\tan C$

c) Lấy điểm D trên tia đối của tia AB sao cho $AD = 6$ và điểm E trên tia AC sao cho $AE = x$. Tìm x để BE là tiếp tuyến của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ADE

Bài 2.63. Cho tam giác ABC cân có cạnh bên bằng b và nội tiếp đường tròn (O;R).

a) Tính côsin của các góc tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

c) Với giá trị nào của b thì tam giác có diện tích lớn nhất ?

DẠNG 2: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai

góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0 và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $A = 87^0$.

Lời giải

Theo định lí côsin ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 32^2 + 4^2 - 2.32.4.\sin 87^0$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lí sin ta có

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{32\sin 87^0}{53,8} \Rightarrow B \approx 36^0$$

Suy ra $C = 180^0 - A - B \approx 180^0 - 87^0 - 36^0 = 57^0$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $A = 60^0$, $B = 40^0$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $C = 180^0 - A - B = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giải thiết ta có $c < b < a$ suy ra $C < B < A$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12^2}{2.2\sqrt{2}.\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $A = 120^0$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120^0.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.64: Giải tam giác ABC biết

a) $a = 2, b = 3, c = 4$.

b) $a = 12$; $c = 8,2$ và $A = 110^0$.

Bài 2.65: Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 109$; $B = 33^0 24'$; $C = 66^0 59'$

b) $a = 20$; $b = 13$; $A = 67^0 23'$

Bài 2.66: Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 4,5$; $A = 30^0$; $C = 75^0$

b) $b = 14;$ $c = 10;$ $A = 145^0$

c) $a = 14;$ $b = 18;$ $c = 20$

Bài 2.67: Cho ΔABC ta có $a = 13$, $b = 4$ và $\cos C = -\dfrac{5}{13}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức liên quan đến các yếu tố của tam giác, tứ giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \ge \dfrac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B.\sin C \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 = \dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \ge \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

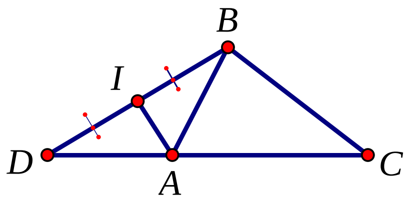
Lời giải (hình 2.9)

a) Trên tia đối của tia AC lấy D thỏa $AD = AB = c$ suy ra tam giác BDA cân tại A và $BDA = \dfrac{1}{2}A$.

Áp dụng định lý hàm số Côsin cho ΔABD, ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD$$
$$= 2c^2 - 2c^2.\cos(180^0 - A)$$
$$= 2c^2(1+\cos A) = 2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$= \frac{c}{b}(a+b+c)(b+c-a) = \frac{4c}{b}p(p-a)$$

Suy ra



Hình 2.9

$$BD = 2\sqrt{\frac{cp(p-a)}{b}}$$

Gọi I là trung điểm của BD suy ra $AI \perp BD$.
Trong tam giác ADI vuông tại I, ta có

$$\cos\frac{A}{2} = \cos ADI = \frac{DI}{AD} = \frac{BD}{2c} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Vậy $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

b) Từ định lý hàm số sin, ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p}{R}$ (1)

Theo câu a) ta có $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, tương tự thì $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ và

$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

kết hợp với công thức $S = \sqrt{p\ \ p-a\ \ \ p-b\ \ \ p-c} = \frac{abc}{4R}$

Suy ra $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$$= \frac{4p}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4pS}{abc} = \frac{p}{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Nhận xét: Từ câu a) và hệ thức lượng giác cơ bản ta suy ra được các công thức

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\ \cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lí côsin và công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \quad \text{đpcm}$$

b) Theo câu a) tương tự ta có $\cot B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Suy ra $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\quad p - a \quad p - b \quad p - c \leq \left(\dfrac{3p - a - b - c}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$

Mặt khác $S = \sqrt{p \quad p - a \quad p - b \quad p - c} \Rightarrow S \leq \sqrt{p\dfrac{p^3}{27}} = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Ta có $p^2 = \dfrac{a + b + c}{4}^2 \leq \dfrac{3 \quad a^2 + b^2 + c^2}{4}$ suy ra $S \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$

Do đó $\cot A + \cot B + \cot C \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4.\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 \text{ (*)}$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} \quad m_b^2 + m_c^2 \quad = a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}\left[\frac{2 \quad a^2 + c^2 \quad - b^2}{4} + \frac{2 \quad a^2 + b^2 \quad - c^2}{4}\right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

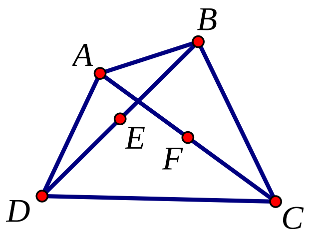
(đpcm)

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm các đường chéo. Chứng minh :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

Lời giải (hình 2.10)

Áp dụng công thức đường trung tuyến với tam giác ABC và ADC ta có:



Hình 2.10

$AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (1)

$CD^2 + DA^2 = 2DE^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\ \ BE^2 + DE^2\ \ + AC^2$

Mặt khác EF là đường trung tuyến tam giác BDF nên $BE^2 + DE^2 = 2EF^2 + \dfrac{BD^2}{2}$

Suy ra $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.68: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$ b) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$

c) $h_a = 2R\sin B\sin C$ d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

e) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}$

Bài 2.69: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $b + c = 2a \Leftrightarrow \dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

b) Góc A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Bài 2.70: Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng

a) Tam giác ABC nhọn

b) $2\sin^2 A = \tan B\tan C$

Bài 2.71: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\cot A = \dfrac{1}{2}\ \ \cot B + \cot C$ thì

$b^2 = \dfrac{1}{2}\ \ a^2 + c^2$.

Bài 2.72: Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $S = 2R^2 \sin A\sin B\sin C$.

b) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Bài 2.73: Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi α là góc hợp bởi hai đường chép AC và BD. Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

Bài 2.74: Cho tam giác ABC có $BAC = 120^0$, AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$

Bài 2.75: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\dfrac{\cos A + \cos B}{a + b} = \dfrac{b + c - a\ \ \ c + a - b}{2abc}$

b) $c^2 + b^2 - a^2\ \ \tan A = \ \ c^2 + a^2 - b^2\ \ \tan B$

Bài 2.76. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Chứng minh rằng

a) $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le R^2(a+b+c)^2$

Bài 2.77. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$\sqrt{r^2 + (p-a)^2} + \sqrt{r^2 + (p-b)^2} + \sqrt{r^2 + (p-c)^2} \le \sqrt{ab+bc+ca}$

Bài 2.78. Cho tam giác ABC. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng

$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-c)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$.

Bài 2.79. Cho tam giác ABC có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \ne 1$. Chứng minh rằng $2\cot A = \cot B + \cot C$

Bài 2.80. Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$. Chứng minh rằng : $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

Bài 2.81. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha, \widehat{GBC} = \beta, \widehat{GCA} = \gamma$

Chứng minh rằng $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}$

Bài 2.82. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$

Bài 2.83: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC = 3AD$. Chứng minh rằng $\cot\widehat{BAD} \ge \frac{4}{3}$

Bài 2.84. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}.S$

DẠNG 4: Nhận dạng tam giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lí côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin C = 2\sin B\cos A$. Chứng minh minh rằng tam giác ABC cân .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin và sin ta có:

$\sin C = 2\sin B\cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2.\frac{b}{2R}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

Ta có: $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{2R}(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})=\dfrac{b+c}{2R}$

$\Leftrightarrow b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=2b^2c+2c^2b$

$\Leftrightarrow b^3+c^3+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c=0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2)-a^2(b+c)=0$

$b^2+c^2=a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c$

b) $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ah_a$ suy ra

$a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c \Leftrightarrow a.\dfrac{2S}{bc}+b.\dfrac{2S}{ca}+c.\dfrac{2S}{ab}=\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow \ a-b\ ^2+\ b-c\ ^2+\ c-a\ ^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+1+\cot^2 B+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}) \Leftrightarrow (\sin^2 A+\sin^2 B)^2=4\sin^2 A\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A=\sin^2 B \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.85: Cho tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC cân nếu $h_a=c.\sin A$

Bài 2.86: Cho tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC cân nếu $4m_a^2=b\ \ b+4c.\cos A$

Bài 2.87: Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2=36r^2$

Bài 2.88: Cho tam giác ABC. Tìm góc A trong tam giác biết các cạnh a, b, c thoả mãn hệ thức:

$b(b^2-a^2)=c(c^2-a^2),(b\neq c)$.

Bài 2.89: Cho ΔABC thoả mãn điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{a^3+c^3-b^3}{a+c-b}=b^2\\ a=2b\cos C\end{cases}$. Chứng minh rằng ΔABC đều.

Bài 2.90: Trong tam giác ABC, chứng minh rằng nếu diện tích tính theo công thức

$S=\dfrac{1}{4}\ \ a+b-c\ \ \ a-b+c$ thì tam giác ABC đều.

Bài 2.91: Cho ΔABC thỏa mãn: $\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Bài 2.92: Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A hoặc B khi và chỉ khi
$\sin C = \cos A + \cos B$.

Bài 2.93: Cho tam giác ABC có hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau và có
$R.r = \dfrac{bc}{2\left(1+\sqrt{10}\right)}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân

Bài 2.94: Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{\sqrt{ab}}{4c}$.

Bài 2.95: Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại tại B khi và chỉ khi
$p\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} = p - c$.