§2: HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b\ (a \neq 0)$.

2. Sự biến thiên

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$
- Hàm số số đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ $(a > 0)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ $(a < 0)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. Đồ thị.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b\ (a \neq 0)$ là một đường thẳng có hệ số góc bằng a, cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và trục tung tại $B\ \ 0;b$

Chú ý:

- Nếu $a = 0 \Rightarrow y = b$ là hàm số hằng, đồ thị là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.
- Phương trình $x = a$ cũng là một đường thẳng(nhưng không phải là một hàm số) vuông góc với trục tọa độ và cắt tại điểm có hoành độ bằng a.
- Cho đường thẳng d có hệ số góc k, d đi qua điểm $M\ \ x_0;y_0$, khi đó phương trình của đường thẳng d là: $y - y_0 = a\ \ x - x_0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ .**

1. Phương pháp giải.

- Để xác định hàm số bậc nhất ta là như sau

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax + b, a \neq 0$. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a, b, từ đó suy ra hàm số cần tìm.

- Cho hai đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$ và $d_2 : y = a_2x + b_2$. Khi đó:

a) d_1 và d_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;

b) d_1 và d_2 song song nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$;

c) d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$. Và tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$

d) d_1 và d_2 vuông góc nhau $\Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng d. Tìm hàm số đó biết:

a) d đi qua $A(1;3)$, $B(2;-1)$

b) d đi qua $C(3;-2)$ và song song với $\Delta: 3x-2y+1=0$

c) d đi qua $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy tại P, Q sao cho $S_{\Delta OPQ}$ nhỏ nhất.

d) d đi qua $N\ \ 2;-1$ và $d \perp d'$ với $d': y = 4x+3$.

Lời giải

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax+b, a \neq 0$

a) Vì $A \in d$ và $B \in d$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3 = a+b \\ -1 = 2a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -4x+7$

b) Ta có $\Delta: y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Vì d / /$\Delta$ nên $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ (1)

Mặt khác $C \in d \Rightarrow -2 = 3a+b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{13}{2} \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

c) Đường thẳng d cắt trục Ox tại $P\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và cắt Oy tại $Q\ \ 0;b$ với $a<0, b>0$

Suy ra $S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2}OP.OQ = \frac{1}{2}.\left|-\frac{b}{a}\right|.\left|b\right| = -\frac{b^2}{2a}$ (3)

Ta có $M \in d \Rightarrow 2 = a+b \Rightarrow b = 2-a$ thay vào (3) ta được

$$S_{\Delta OPQ} = -\frac{\ 2-a\ ^{2}}{2a} = -\frac{2}{a} - \frac{a}{2} + 2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$-\frac{2}{a} - \frac{a}{2} \geq 2\sqrt{\left(-\frac{2}{a}\right).\left(-\frac{a}{2}\right)} = 2 \Rightarrow S_{\Delta OPQ} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} -\frac{2}{a} = -\frac{a}{2} \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x+4$.

d) Đường thẳng d đi qua $N\ \ 2;-1$ nên $-1 = 2a+b$ (4)

Và $d \perp d' \Rightarrow 4.a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$ thay vào (4) ta được $b = -\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng $d: y = x + 2m,\ d': y = 3x + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng $d,\ d'$ cắt nhau và tìm tọa độ giao điểm của chúng

b) Tìm m để ba đường thẳng d, d' và $d'': y = -mx + 2$ phân biệt đồng quy.

Lời giải

a) Ta có $a_d = 1 \neq a_{d'} = 3$ suy ra hai đường thẳng $d,\ d'$ cắt nhau.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $d,\ d'$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = x + 2m \\ y = 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ y = 3m - 1 \end{cases}$

suy ra $d,\ d'$ cắt nhau tại $M(m - 1; 3m - 1)$

b) Vì ba đường thẳng $d,\ d',\ d''$ đồng quy nên $M \in d''$ ta có

$$3m - 1 = -m(m - 1) + 2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$$

- Với $m = 1$ ta có ba đường thẳng là $d: y = x + 2,\ d': y = 3x + 2,\ d'': y = -x + 2,$ phân biệt và đồng quy tại $M(0; 2)$.
- Với $m = -3$ ta có $d' \equiv d''$ suy ra $m = -3$ không thỏa mãn

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $d: y = (m - 1)x + m$ và $d': y = (m^2 - 1)x + 6$

a) Tìm m để hai đường thẳng $d,\ d'$ song song với nhau

b) Tìm m để đường thẳng d cắt trục tung tại A, d' cắt trục hoành tại B sao cho tam giác OAB cân tại O

Lời giải

a) Với $m = 1$ ta có $d: y = 1,\ d': y = 6$ do đó hai đường thẳng này song song với nhau

Với $m = -1$ ta có $d: y = -2x - 1,\ d': y = 6$ suy ra hai đường thẳng này cắt nhau tại $M\left(-\frac{7}{2}; 6\right)$

Với $m \neq \pm 1$ khi đó hai đường thẳng trên là đồ thị của hàm số bậc nhất nên song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 1 = m^2 - 1 \\ m \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 0 \end{array}\right. \\ m \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq \pm 1$ suy ra $m = 0$.

Vậy $m = 0$ và $m = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = (m - 1)x + m \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow A(0; m)$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = (m^2 - 1)x + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (*)

Rõ ràng $m = \pm 1$ hệ phương trình (*) vô nghiệm

Với $m \neq \pm 1$ ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{1-m^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{6}{1-m^2};0\right)$

Do đó tam giác OAB cân tại $O \Leftrightarrow \left|m\right| = \left|\dfrac{6}{1-m^2}\right|$

$\Leftrightarrow \left|m - m^3\right| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - m^3 = 6 \\ m - m^3 = -6 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^3 - m + 6 = 0 \\ m^3 - m - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.16: Cho hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng d. Tìm hàm số đó biết:

a) d đi qua $A(1;1)$, $B(3;-2)$

b) d đi qua $C(2;-2)$ và song song với $\Delta : x - y + 1 = 0$

c) d đi qua $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy tại P, Q sao cho ΔOPQ cân tại O.

d) d đi qua $N\ \ 1;-1$ và $d \perp d'$ với $d' : y = -x + 3$.

Bài 2.17: Tìm m để ba đường thẳng $d : y = 2x$, $d' : y = -x + 6$, $d'' : y = m^2x + 5m + 3$ phân biệt đồng quy.

➢ DẠNG TOÁN 2: XÉT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

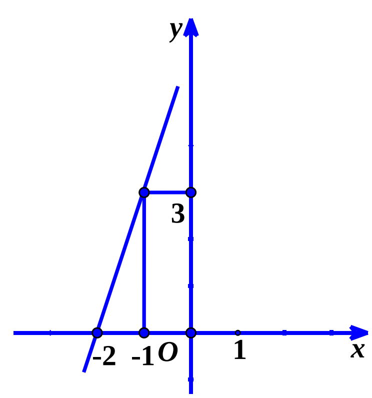
a) $y = 3x + 6$ $\qquad\qquad$ $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $a = 3 > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

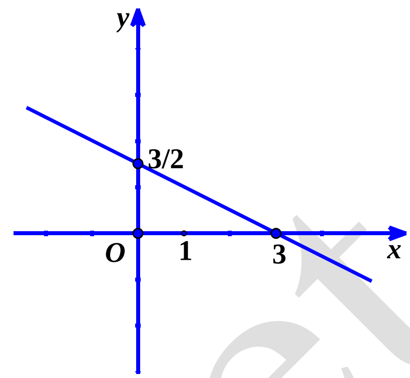
Bảng biến thiên

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$y = 3x + 6$	$-\infty \nearrow +\infty$



Đồ thị hàm số $y = 3x + 6$ đi qua $A\ \ -2;0$, $B\ \ -1;3$

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $a=-\dfrac{1}{2}<0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$



Bảng biến thiên

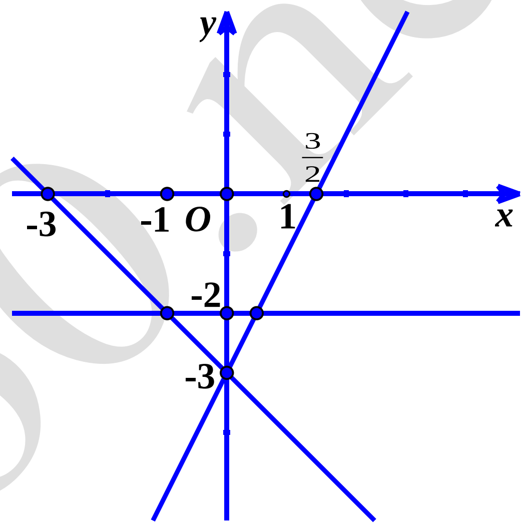
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

Đồ thị hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ đi qua $A\ \ 3;0$, $B\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

Ví dụ 2. Cho các hàm số : $y=2x-3,\ y=-x-3,\ y=-2$.

a) Vẽ đồ thị các hàm số trên

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định giao điểm của các đồ thị hàm số đó



Lời giải

a) Đường thẳng $y=2x-3$ đi qua các điểm

$A\ \ 0;-3$, $B\left(\dfrac{3}{2};0\right)$

Đường thẳng $y=-x-3$ đi qua các điểm

$A\ \ 0;-3$, $C\ \ -3;0$

Đường thẳng $y=-2$ song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2

b) Đường thẳng $y=2x-3,\ y=-x-3$ cắt nhau tại

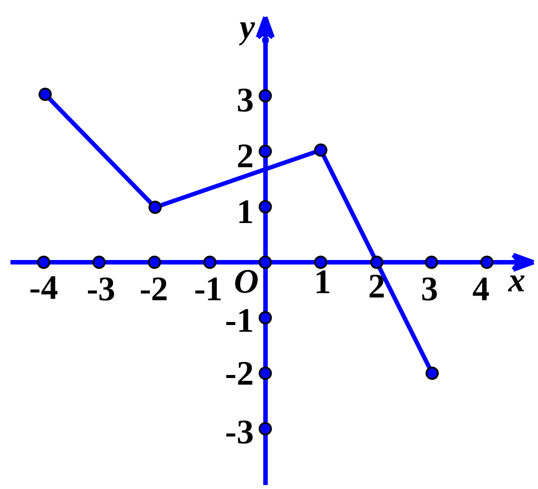
$A\ \ 0;-3$, Đường thẳng $y=-x-3,\ y=-2$ cắt nhau tại

$A'\ \ -1;-2$, Đường thẳng $y=2x-3,\ y=-2$ cắt nhau tại $A''\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$.

Ví dụ 3: Cho đồ thị hàm số có đồ thị C (hình vẽ)

a) Hãy lập bảng biến thiên của hàm số trên $[-3;3]$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;2]$



Lời giải

a) Bảng biến thiên của hàm số trên $[-3;3]$

x	-3	-2	1	3
y	2 $\searrow$	1 $\nearrow$	2 $\searrow$	-2

b) Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có

$\max\limits_{[-4;2]}=3$ khi và chỉ khi $x=-4$

$\min\limits_{[-4;2]} = 0$ khi và chỉ khi $x = 2$

2. Bài tập luyện tập.

Bài 2.18: Cho các hàm số : $y = -2x + 3,\ y = x + 2,\ y = \dfrac{3}{2}$.

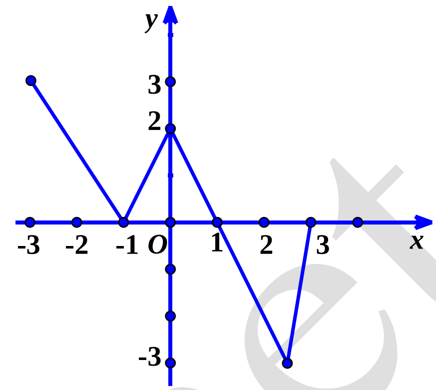
a) Vẽ đồ thị các hàm số trên

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định giao điểm của các đồ thị hàm số đó

Bài 2.19: Cho đồ thị hàm số có đồ thị (C) (hình vẽ)

a) Hãy lập bảng biến thiên của hàm số trên $\left[-3;3\right]$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $\left[-2;2\right]$



➢ **DẠNG TOÁN 3: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI** $y = \left|ax + b\right|$.

1. Phương pháp giải.

Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \left|ax + b\right|$ ta làm như sau

Cách 1: Vẽ (C_1) là đường thẳng $y = ax + b$ với phần đồ thị sao cho hoành độ x thỏa mãn $x \geq -\dfrac{b}{a}$, Vẽ (C_2) là đường thẳng $y = -ax - b$ lấy phần đồ thị sao cho $x < -\dfrac{b}{a}$. Khi đó (C) là hợp của hai đồ thị (C_1) và (C_2).

Cách 2: Vẽ đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xóa đi phần đường thẳng nằm dưới trục hoành. Phần đường thẳng nằm trên trục hoành chính là (C).

Chú ý:

- Biết trước đồ thị $(C): y = f(x)$ khi đó đồ thị $(C_1): y = f(\left|x\right|)$ là gồm phần :

  - Giữ nguyên đồ thị (C) ở bên phải trục tung;

  - Lấy đối xứng đồ thị (C) ở bên phải trục tung qua trục tung.

- Biết trước đồ thị $(C): y = f(x)$ khi đó đồ thị $(C_2): y = \left|f(x)\right|$ là gồm phần:

  - Giữ nguyên đồ thị (C) ở phía trên trục hoành

  - Lấy đối xứng đồ thị (C) ở trên dưới trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành.

2. Các ví dụ minh họa.

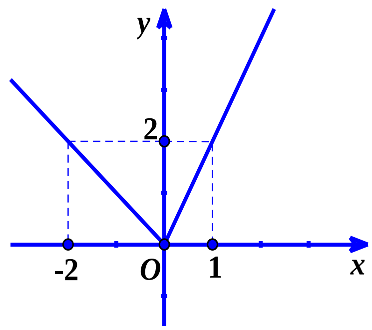
Ví dụ 1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

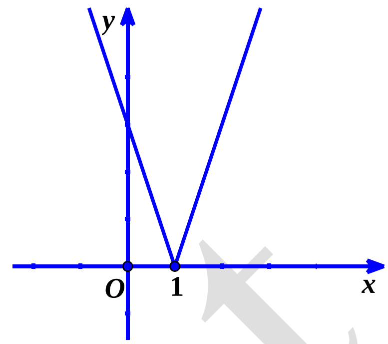
a) $y = \begin{cases} 2x & khi\ x \geq 0 \\ -x & khi\ x < 0 \end{cases}$.   b) $y = \left|-3x + 3\right|$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$ đồ thị hàm số $y = 2x$ là phần đường thẳng đi qua hai điểm $O(0;0)$, $A(1;2)$ nằm bên phải của đường thẳng $x = 0$.

Với $x < 0$ đồ thị hàm số $y = -x$ là phần đường thẳng đi qua hai điểm $B(-1;1)$, $C(-2;2)$ nằm bên trái của đường thẳng $x = 0$.





b) Vẽ hai đường thẳng $y = -3x + 3$ và $y = 3x - 3$ và lấy phần đường thẳng nằm trên trục hoành

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị của các hàm số sau

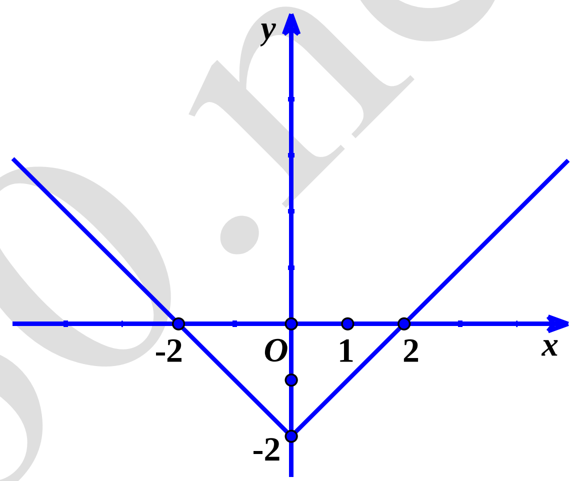
a) $y = |x| - 2$ b) $y = ||x| - 2|$

Lời giải

a) *Cách 1*: Ta có $y = \begin{cases} x - 2 & khi\ x \geq 0 \\ -x - 2 & khi\ x < 0 \end{cases}$

Vẽ đường thẳng $y = x - 2$ đi qua hai điểm $A(0;-2)$, $B(2;0)$ và lấy phần đường thẳng bên phải của trục tung

Vẽ đường thẳng $y = -x - 2$ đi qua hai điểm $A(0;-2)$, $C(-2;0)$ và lấy phần đường thẳng bên trái của trục tung.



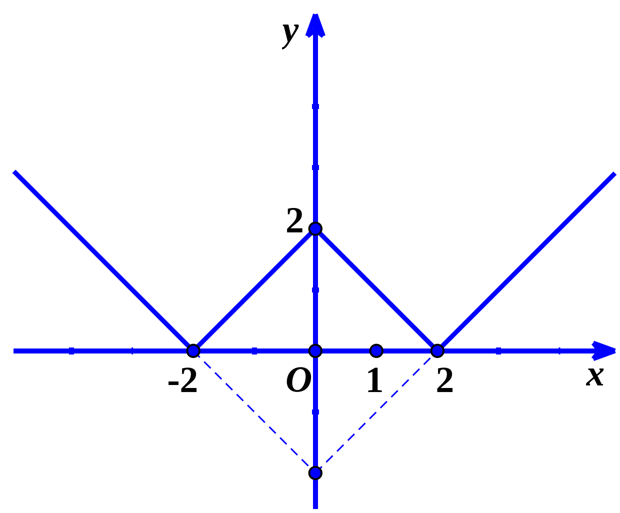
Cách 2: Đường thẳng $d : y = x - 2$ đi qua $A(0;-2)$, $B(2;0)$.

Khi đó đồ thị của hàm số $y = |x| - 2$ là phần đường thẳng d nằm bên phải của trục tung và phần đối xứng của nó qua trục tung

b) Đồ thị $y = ||x| - 2|$ là gồm phần:

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = |x| - 2$ ở phía trên trục hoành

- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = |x| - 2$ ở phía dưới trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành.

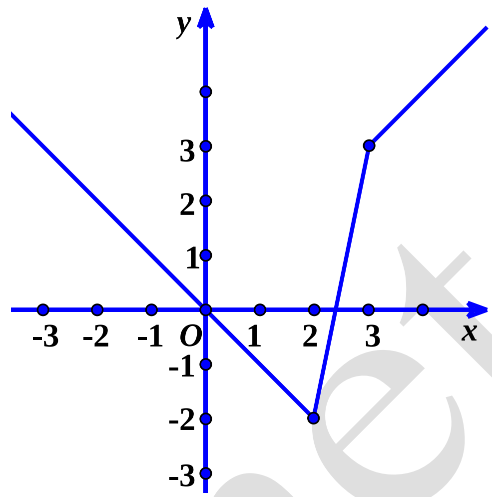


Ví dụ 3: Cho đồ thị $(C) : y = 3|x - 2| - |2x - 6|$

a) Vẽ (C)

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên với $x \in [-3;4]$

Lời giải



a) Ta có $y = \begin{cases} x & khi\ x \geq 3 \\ 5x - 12 & khi\ 2 < x < 3 \\ -x & khi\ x \leq 2 \end{cases}$

Vẽ đường thẳng $y = x$ đi qua hai điểm $O\ \ 0;0\ $, $A\ \ 1;1\ $ và lấy phần đường thẳng bên phải của đường thẳng $x = 3$

Vẽ đường thẳng $y = 5x - 12$ đi qua hai điểm $B\ \ 3;3\ $, $C\ \ 2;-2\ $ và lấy phần đường thẳng nằm giữa của hai đường thẳng $x = 2,\ x = 3$.

Vẽ đường thẳng $y = -x$ đi qua hai điểm $O\ \ 0;0\ $, $D\ \ -1;-1\ $ và lấy phần đường thẳng bên trái của đường thẳng $x = 2$

b) Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$\max\limits_{[-3;4]} y = 4$ khi và chỉ khi $x = 4$

$\min\limits_{[-3;4]} y = -2$ khi và chỉ khi $x = 2$

Ví dụ 4: Lập bảng biến thiên của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.   b) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \left|x + 1\right|$.

Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các hàm số đó trên $\left[-2;2\right]$

Lời giải

a) Ta có $y = \left|x\right| + \left|x - 1\right| = \begin{cases} 2x - 1 & khi\ x \geq 1 \\ 1 & khi\ 0 < x < 1 \\ 1 - 2x & khi\ x \leq 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	1 →	1 ↗	$+\infty$

Ta có $y\ \ -2\ \ = 5,\ y\ \ 2\ \ = 3$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-2;2]} y = 5$ khi và chỉ khi $x = -2$

$\min\limits_{[-2;2]} y = 1$ khi và chỉ khi $x \in \left[0;1\right]$

b) Ta có $y = \left|x + 2\right| - \left|x + 1\right| = \begin{cases} 1 & khi\ x \geq -1 \\ 2x + 3 & khi\ -2 < x < -1 \\ -1 & khi\ x \leq -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
y	-1	$\rightarrow$	-1	$\nearrow$	1	$\rightarrow$	1

Ta có $y\left(-2\right)=-1$, $y\left(2\right)=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-2;2]} y = 1$ khi và chỉ khi $x \le -2$

$\min\limits_{[-2;2]} y = 1$ khi và chỉ khi $x \ge -1$

3. Bài tập luyện tập

Bài 2.20: Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của:

$\left(C_1\right): y = 2\left|x\right| - 3,\quad \left(C_2\right): y = \left|2x-3\right|,\quad \left(C_3\right): y = \left|2\left|x\right| - 3\right|$

Bài 2.21: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3\sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các hàm số đó trên $\left[0;2\right]$.

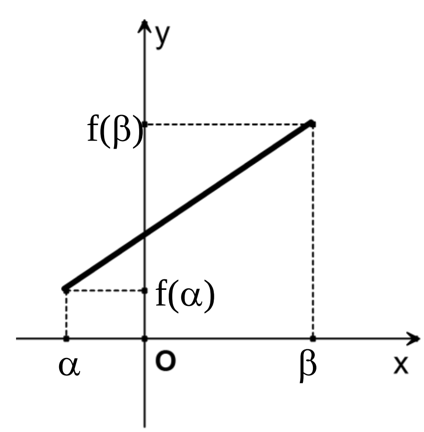
Bài 2.22: a) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x+2} - \left|x-2\right|$

b) Biện luận số giao điểm của đồ thị hàm số trên với đường thẳng $y = m$ theo m.

➢ **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT**.

1. Phương pháp giải.

Cho hàm số $f\left(x\right) = ax + b$ và đoạn $\left[\alpha;\beta\right] \subset \mathbb{R}$. Khi đó, đồ thị của hàm số y = f(x) trên $[\alpha;\beta]$ là một đoạn thẳng nên ta có một số tính chất:



- $\max\limits_{[\alpha,\beta]}$ f(x) = max{f(α); f(β)},
- $\min\limits_{[\alpha,\beta]}$ f(x) = min{f(α); f(β)},
- $\max\limits_{[\alpha,\beta]} \left|f(x)\right| = \max\left\{\left|f(\alpha)\right|; \left|f(\beta)\right|\right\}$.

Áp dụng các tính chất đơn giản này cho chúng ta cách giải nhiều bài toán một cách thú vị, ngắn gọn, hiệu quả.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f\left(x\right) = \left|2x - m\right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên $\left[1;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Dựa vào các nhận xét trên ta thấy $\max\limits_{[1;2]} f(x)$ chỉ có thể đạt được tại $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Như vậy nếu đặt M = $\max\limits_{[1;2]} f(x)$ thì $M \ge f\ \ 1\ \ = \left|2-m\right|$ và $M \ge f\ \ 2\ \ = \left|4-m\right|$.

Ta có

$$M \ge \frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac{\left|2-m\right|+\left|4-m\right|}{2} \ge \frac{\left|(2-m)+(m-4)\right|}{2} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \left|2-m\right| = \left|4-m\right| \\ (2-m)(m-4) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1, đạt được chỉ khi m = 3.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \left|\sqrt{2x-x^2} - 3m + 4\right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $A = \max y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1-\ \ x-1\ \ ^2}$ do đó $0 \le t \le 1$

Khi đó hàm số được viết lại là $y = \left|t-3m+4\right|$ với $t \in \left[0;1\right]$ suy ra

$$A = \max\limits_{[0,1]}\left|t-3m+4\right| = \max\ \ \left|-3m+4\right|,\left|5-3m+\right|\ \ \ge \frac{\left|-3m+4\right|+\left|5-3m\right|}{2}$$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có

$\left|-3m+4\right|+\left|5-3m\right| = \left|3m-4\right|+\left|5-3m\right| \ge 1$

Do đó $A \ge \frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra $m = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c thuộc $\left[0;2\right]$. Chứng minh rằng: $2\ \ a+b+c\ \ -\ \ ab+bc+ca\ \ \le 4$

Lời giải

Viết bất đẳng thức lại thành $\ \ 2-b-c\ \ a+2\ \ b+c\ \ -bc-4 \le 0$

Xét hàm số bậc nhất $f\ \ a\ \ =\ \ 2-b-c\ \ a+2\ \ b+c\ \ -bc-4$ với ẩn $a \in \left[0;2\right]$

Ta có: $f\ \ 0\ \ = 2\ \ b+c\ \ -bc-4 = -\ \ 2-b\ \ \ 2-c\ \ \le 0$

$f\ \ 2\ \ =\ \ 2-b-c\ \ 2+2\ \ b+c\ \ -bc-4 = -bc \le 0$

Suy ra $f\ \ a\ \ \le max\ \ f\ \ 0\ \ ;f\ \ 2\ \ \ \le 0$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho các số thực không âm $x,\ y,\ z$ thoả mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+xyz \ge 4$.

Lời giải

Bất đẳng thức t\ung đương với $(y+z)^2-2yz+x^2+xyz \ge 4$

$\Leftrightarrow (3-x)^2+x^2+yz\ \ x-2\ \ -4 \ge 0 \Leftrightarrow yz(x-2)+2x^2-6x+5 \ge 0$

Đặt $t = yz$, do $yz \ge 0$ và yz $\le \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{(3-x)^2}{4}$ nên $t \in \left[0;\frac{(3-x)^2}{4}\right]$.

khi đó VT(2) là hàm số bậc nhất của biến t, $f(t) = (x-2)t+2x^2-6x+5$.

Để chứng minh bất đẳng thức (2) ta sẽ chứng minh $f\ \ 0\ \ \geq 0$ và $f\left(\dfrac{3-x^{\ \ 2}}{4}\right) \geq 0$.

Thật vậy, ta có $f\ \ 0\ \ = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{5} \geq 0$ và $f\left(\dfrac{3-x^{\ \ 2}}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\ \ x-1^{\ \ 2}\ \ x+2\ \ \geq 0$

nên bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.23: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \dfrac{7}{27}$.

Bài 2.24: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$. Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$.

Bài 2.25: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \dfrac{1}{4}$.

Bài 2.26: Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

Bài 2.27: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh $x^2y + y^2z + z^2x \leq \dfrac{4}{27}$.

Bài 2.28: Chứng minh rằng với $\forall m \leq 1$ thì $x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \geq 0$ với $\forall x \in \left[1; +\infty\ \ \right.$.