§3: HÀM SỐ BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c \;\; a \neq 0$.

2. Sự biến thiên

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$
- Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$. Khi $a < 0$ hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có giá trị lớn nhất là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

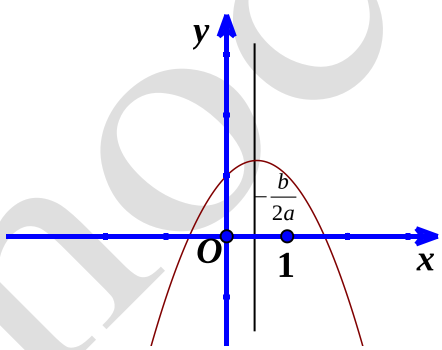
x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

3. Đồ thị.

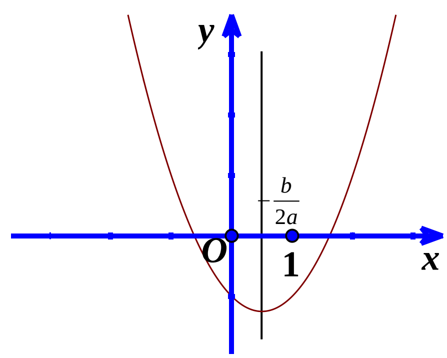
Khi $a > 0$ đồ thị hàm số bậc hai bề lõm hướng lên trên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Khi $a < 0$ đồ thị hàm số bậc hai bề lõm hướng lên trên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Đồ thị nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.



$a < 0$



$a > 0$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI .**

1. Phương pháp giải.

Để xác định hàm số bậc hai ta là như sau

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a, b, c, từ đó suy ra hàm số cần tìm.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ biết:

a) (P) đi qua $A(2;3)$ có đỉnh $I(1;2)$

b) $c = 2$ và (P) đi qua $B(3;-4)$ và có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$.

c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$.

d) (P) đi qua $M(4;3)$ cắt Ox tại $N(3;0)$ và P sao cho ΔINP có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm P nhỏ hơn 3.

.Lời giải

a) Vì $A \in (P)$ nên $3 = 4a + 2b + c$ (1).

Mặt khác (P) có đỉnh $I(1;2)$ nên $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$ (2) và $I \in (P)$ suy ra $2 = a + b + c$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - 2x + 3$.

b) Ta có $c = 2$ và (P) đi qua $B(3;-4)$ nên $-4 = 9a + 3b + 2 \Leftrightarrow 3a + b = -2$ (4)

(P) có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$ nên $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3a$ thay vào (4) ta được

$3a + 3a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -1$.

Vậy (P) cần tìm là $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$.

c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ nên ta có

$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a + b = 0$ (5), $\frac{3}{4} = a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c \Leftrightarrow a + 2b + 4c = 3$ (6) và $a > 0$

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$ nên $a + b + c = 1$ (7)

Từ (5), (6) và (7) ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b+4c=3 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - x + 1$.

d) Vì (P) đi qua $M(4;3)$ nên $3 = 16a + 4b + c$ (8)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0 = 9a + 3b + c$ (9), (P) cắt Ox tại P nên $P(t;0)$, $t < 3$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t+3 = -\dfrac{b}{a} \\ 3t = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta IBC} = \dfrac{1}{2} IH.NP$ với H là hình chiếu của $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH = \left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|$, $NP = 3 - t$ nên $S_{\Delta INP} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|.(3-t) = 1$

$\Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a}\right| = \left|\dfrac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\dfrac{t+3}{4}\right)^2 - 3t\right| = \left|\dfrac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)^3 = \dfrac{8}{|a|}$ (10)

Từ (8) và (9) ta có $7a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 7a$ suy ra $t + 3 = -\dfrac{3-7a}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{4-t}{3}$

Thay vào (10) ta có $(3-t)^3 = \dfrac{8(4-t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3 - 27t^2 + 73t - 49 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = 3$.

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - 4x + 3$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.29: Xác định phương trình của Parabol (P): $y = x^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $A(1;\ 0)$ và $B(-2;\ -6)$

b) (P) có đỉnh $I(1;\ 4)$

c) (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và có đỉnh $S(-2;-1)$.

Bài 2.30: Tìm Parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng Parabol đó :

a) Qua điểm $A(1;\ 5)$

b) Cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 2

c) Có trục đối xứng $x = -3$

d) Có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{11}{4}\right)$

Bài 2.31: Xác định phương trình Parabol:

a) $y = ax^2 + bx + 2$ qua A(1 ; 0) và trục đối xứng $x = \dfrac{3}{2}$

b) $y = ax^2 + bx + 3$ qua A(-1 ; 9) và trục đối xứng $x = -2$

c) $y = ax^2 + bx + c$ qua A(0 ; 5) và đỉnh I (3; - 4)

➢ DẠNG TOÁN 2: XÉT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI.

1. Phương pháp giải

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta thực hiện các bước như sau:

– Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

– Xác định trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.

– Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).

– Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

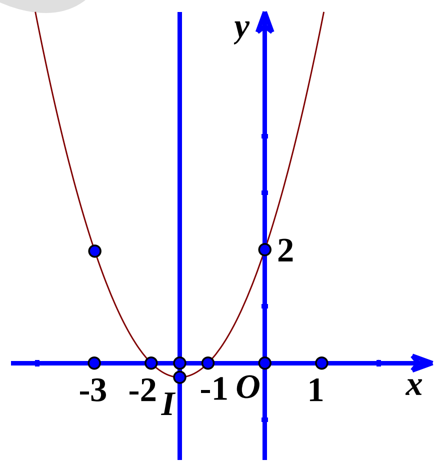
2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 2\sqrt{2}x$

Lời giải

a) Ta có $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4}$



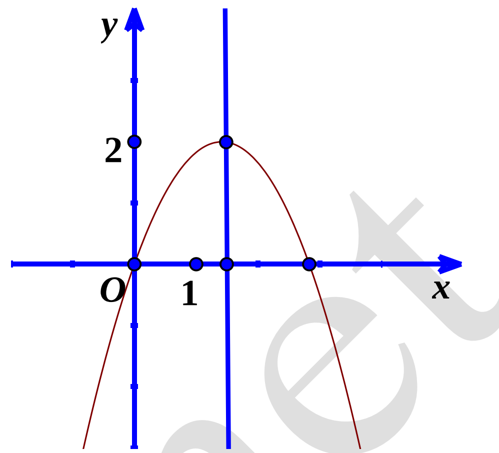
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$y = x^2 + 3x + 2$	$+\infty$		$+\infty$
		$-\dfrac{1}{4}$	

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + 2$ có đỉnh là

$I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$, đi qua các điểm $A\ -2;0$, $B\ -1;0$, $C\ 0;2$, $D\ -3;2$

Nhận đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên



b) Ta có $-\frac{b}{2a} = \sqrt{2}, -\frac{\Delta}{4a} = 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$y = -x^2 + 2\sqrt{2}x$	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2\sqrt{2}x$ có đỉnh là $I\ \sqrt{2};2$, đi qua các điểm $O\ 0;0$, $B\ 2\sqrt{2};0$

Nhận đường thẳng $x = \sqrt{2}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số trên

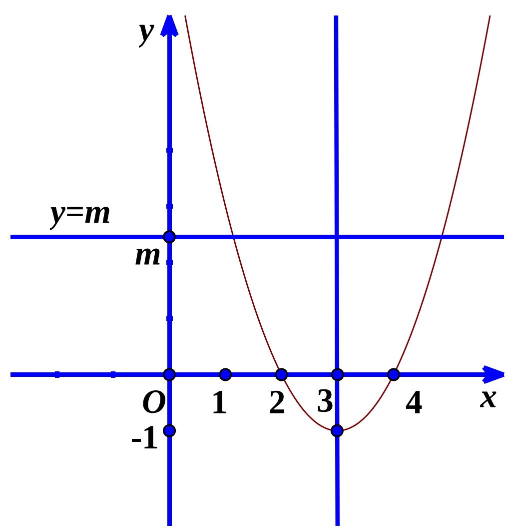
b) Sử dụng đồ thị để biện luận theo tham số m số điểm chung của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số trên

c) Sử dụng đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị dương

d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$

Lời giải

a) Ta có $-\frac{b}{2a} = 3, -\frac{\Delta}{4a} = -1$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$y = x^2 - 6x + 8$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + 2$ có đỉnh là $I\ 3;-1$, đi qua các điểm $A\ 2;0$, $B\ 4;0$

Nhận đường thẳng $x = 3$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên

b) Đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với trục hoành do đó dựa vào đồ thị ta có

Với $m < -1$ đường thẳng $y = m$ và parabol $y = x^2 - 6x + 8$ không cắt nhau

Với $m=-1$ đường thẳng $y=m$ và parabol $y=x^2-6x+8$ cắt nhau tại một điểm(tiếp xúc)

Với $m>-1$ đường thẳng $y=m$ và parabol $y=x^2-6x+8$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

c) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm hoàn toàn trên trục hoành

Do đó hàm số chỉ nhận giá trị dương khi và chỉ khi $x \in \ -\infty;2\ \cup\ 4;+\infty$.

d) Ta có $y\ -1\ =15$, $y\ 5\ =13$, $y\ 3\ =-1$, kết hợp với đồ thị hàm số suy ra

$\max\limits_{[-1;5]} y=15$ khi và chỉ khi $x=-1$

$\min\limits_{[-1;5]} y=-1$ khi và chỉ khi $x=3$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.32: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y=x^2-3x+2$ b) $y=-2x^2+4x$

Bài 2.33: Cho hàm số $y=-x^2-2x+3$

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số trên

b) Tìm m để đồ thị hàm số trên cắt đường thẳng $y=m$ tại hai điểm phân biệt

c) Sử dụng đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị âm

d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-3;1\right]$

- **DẠNG TOÁN 3: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC VÀ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI.**

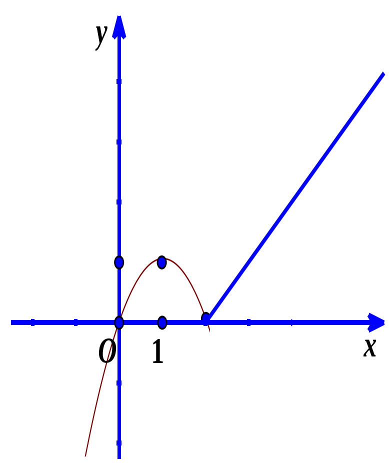
1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y=\begin{cases} x-2 & khi\ x\ge 2 \\ -x^2+2x & khi\ \ x<2 \end{cases}$ b) $y=\left|x^2-x-2\right|$

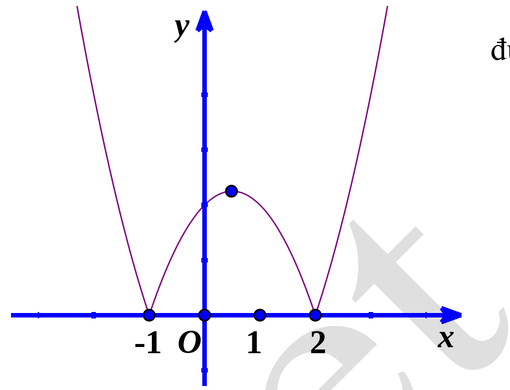
Lời giải

a) Đồ thị hàm số $y=\begin{cases} x-2 & khi\ x\ge 2 \\ -x^2+2x & khi\ \ x<2 \end{cases}$ gồm :



+ Vẽ đường thẳng $y=x-2$ đi qua $A\ \ 2;0\ $, $B\ \ 0;-2\ $ và lấy phần nằm bên phải của đường thẳng $x=2$

+ Parabol $y = -x^2 + 2x$ có đỉnh $I\ \ 1;2$, trục đối xứng $x = 1$, đi qua các điểm $O\ \ 0;0$, $C\ \ 2;0$ và lấy phần đồ thị nằm bên trái của đường thẳng $x = 2$



b) Vẽ parabol P của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$, đi qua các điểm $A\ \ -1;0$, $B\ \ 2;0$,$C\ \ 0;-2$, $D\ \ 1;-2$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - x - 2\right|$ gồm

+ Phần parabol P nằm phía trên trục hoành và phần đối xứng của P nằm dưới trục hoành qua trục hoành.

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị của hàm số sau

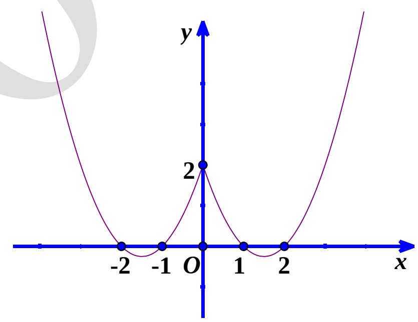
a) $y = x^2 - 3\left|x\right| + 2$

b) $y = \left|x^2 - 3\left|x\right| + 2\right|$

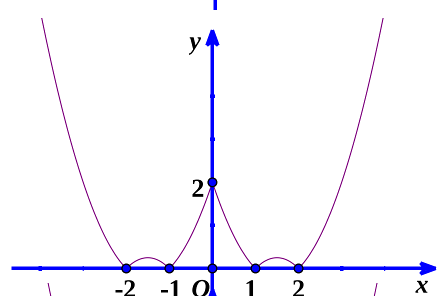
c) $y = x^2 - 3\left|x\right| + 3$

d) $y = \left|x^2 - 4x - 3\left|x - 2\right| + 6\right| - 1$

Lời giải

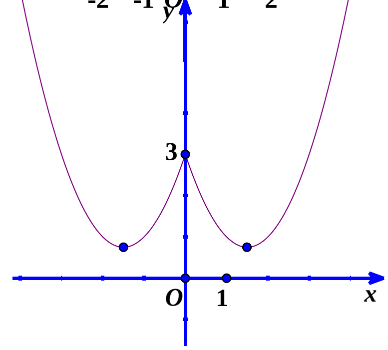


a) Vẽ đồ thị hàm số P $:y = x^2 - 3x + 2$ có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$, đi qua các điểm $A\ \ 1;0$, $B\ \ 2;0$,$C\ \ 0;2$, $D\ \ 3;2$. Bề lõm hướng lên trên.



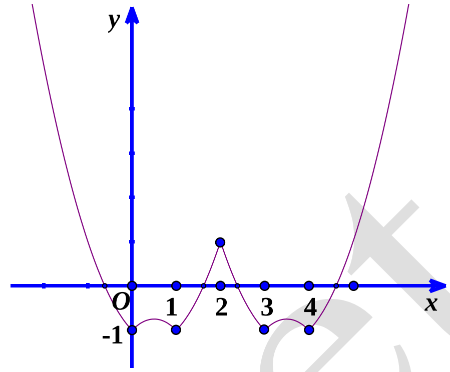
Khi đó đồ thị hàm số $y = x^2 - 3\left|x\right| + 2$ là P_1 gồm phần bên phải trục tung của P và phần lấy đối xứng của nó qua trục tung.

b) Đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 3\left|x\right| + 2\right|$ là P_2 gồm phần phía trên trục hoành của P_1 và phần đối xứng của P_1 nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.



c) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 3\left|x\right| + 3$ là P_3 có được từ việc tịnh tiến P_1 đi một đơn vị lên phái trên song song với trục tung.

d) Ta có



$y = \left|x^2 - 4x - 3|x-2| + 6\right| - 1 = \left|(x-2)^2 - 3|x-2| + 2\right| - 1$

Do đó tịnh tiến P_1 sang phải đi hai đơn vị song song với trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = \left|(x-2)^2 - 3|x-2| + 2\right|$, tiếp tục tịnh tiến xuống dưới một đơn vị song song với trục tung ta được đồ thị hàm số $y = \left|(x-2)^2 - 3|x-2| + 2\right| - 1$

2. Bài tập luyện tập.

Bài tập 2.34: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y = \begin{cases} x^2 - x & khi\ x \ge 1 \\ -x^2 + x + 2 & khi\ \ x < 1 \end{cases}$ b) $y = \left|-x^2 + 2x + 3\right|$

Bài 2.35: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y = -x^2 - 2|x| + 3$ b) $y = \begin{cases} \left|-x^2 - 2x + 3\right| & khi\ x \ge 1 \\ -x^2 - 2|x| + 3 & khi\ x < 1 \end{cases}$

➢ **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

Dựa vào đồ thị(bảng biến thiên) của hàm số $y = ax^2 + bx + c\ \ (a \ne 0)$ ta thấy nó đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $[\alpha;\beta]$ tại điểm $x = \alpha$ hoặc $x = \beta$ hoặc $x = -\dfrac{b}{2a}$. Cụ thể:

TH 1: $a > 0$

* Nếu $-\dfrac{b}{2a} \in [\alpha;\beta] \Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = f(-\dfrac{b}{2a});\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \max\left\{f(\alpha), f(\beta)\right\}$

* Nếu $-\dfrac{b}{2a} \notin [\alpha;\beta] \Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \min\left\{f(\alpha), f(\beta)\right\}\ ;\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \max\left\{f(\alpha), f(\beta)\right\}$

TH 2: $a < 0$: * Nếu $-\dfrac{b}{2a} \in [\alpha;\beta] \Rightarrow \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = f(-\dfrac{b}{2a});\ \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \min\left\{f(\alpha), f(\beta)\right\}$

* Nếu $-\dfrac{b}{2a}\notin\left[\alpha;\beta\right]\Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\min\ \ f(\alpha),f(\beta)\ \ ;\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\max\ \ f(\alpha),f(\beta)$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2+2\ \ m+3\ \ x+m^2-3=0$, *m* là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 và $P=5(x_1+x_2)-2x_1x_2$ giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $\Delta'=\ \ m+3\ ^2-\ \ m^2-3\ \ =6m+12$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 6m+12\geq 0\Leftrightarrow m\geq -2$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2\ \ m+3\\ x_1x_2=m^2-3\end{cases}$

$P=-10\ \ m+3\ \ -2\ \ m^2-3\ \ =-2m^2-10m-24$

Xét hàm số $y=-2x^2-10x-24$ với $x\in\left[-2;+\infty\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\dfrac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$y=-2x^2-10x-24$		-12	$-\infty$

Suy ra $\max\limits_{\left[-2;+\infty\right.} y=-12$ khi và chỉ khi $x=-2$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm. $y=$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}-3\sqrt[3]{x^2+1}+1$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1},\ t\geq 1\Rightarrow t^2=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}$

Khi đó hàm số trở thành $y=t^2-3t+1$ với $t\geq 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$y=t^2-3t+1$	-1	$-\dfrac{5}{4}$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}-3\sqrt[3]{x^2+1}+1$ là $-\dfrac{5}{4}$ khi và chỉ khi $t=\dfrac{3}{2}$ hay

$\sqrt[3]{x^2+1}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{19}{8}}$

Ví dụ 3:Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-4x^2-1$ trên $\left[-1;2\right]$.

Lời giải

Đặt $t=x^2$. Với $x\in\left[-1;2\right]$ ta có $t\in\left[0;4\right]$

Hàm số trở thành $f(t)=t^2-4t-1$ với $t\in\left[0;4\right]$

Bảng biến thiên

t	0		2		4
$y=t^2-3t+1$	-1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	-1

Suy ra $\underset{\left[-1;2\right]}{max}\,y=\underset{\left[0;4\right]}{max}\,f(t)=-1$ khi $\left[\begin{array}{l}t=0\\t=4\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$

$\min\limits_{\left[-1;2\right]}y=\min\limits_{\left[-1;2\right]}f(t)=-1$ khi $t=2$ hay $x=\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Cho các số thực $a,\,b$ thoả mãn $ab\neq0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+1.$$

Lời giải

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. Ta có $\left|t\right|=\left|\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right|=\left|\dfrac{a}{b}\right|+\left|\dfrac{b}{a}\right|\geq2\sqrt{\left|\dfrac{a}{b}\right|.\left|\dfrac{b}{a}\right|}=2$,

$t^2=\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+2\Rightarrow\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}=t^2-2$

Ta có $P=t^2-2-t+1=t^2-t-1$

Xét hàm số $f(t)=t^2-t-1$ với $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2	1	2		$+\infty$
$f(t)=t^2-t-1$	$+\infty$	$\searrow$	5		1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

$\min P = \min\limits_{(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)} f(t) = 1$ khi $t = 2$ hay $2 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 5: Cho các số x, y thoả mãn: $x^2 + y^2 = 1 + xy$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{9} \le x^4 + y^4 - x^2y^2 \le \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Đặt $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$

Ta có $P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$

Đặt $t = xy$, khi đó $P = -2t^2 + 2t + 1$

Vì $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ x^2 + y^2 \ge -2xy \end{cases}$ nên $\begin{cases} 1 + xy \ge 2xy \\ 1 + xy \ge -2xy \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le xy \le 1$

Do đó $-\dfrac{1}{3} \le t \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ trên $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$

Ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$, ta có bảng biến thiên

t	$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		1
$f(t) = -2t^2 + 2t + 1$	$\dfrac{1}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left[-\frac{1}{3};12\right]} f(t) = \dfrac{1}{9} \le P \le \max\limits_{\left[-\frac{1}{3};1\right]} f(t) = \dfrac{3}{2}$

Suy ra điều phải chứng minh.

3. Bài tập luyện tập

Bài 2.36: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $y = x^4 - 2x^2$ trên $[-2;1]$

b) $y = x^4 + 2x^3 - x$ trên $[-1;1]$.

Bài 2.37: Cho x, y là các số thực thoả mãn: $2(x^2 + y^2) = xy + 1$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{18}{25} \le 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 \le \dfrac{70}{33}$.

Bài 2.38: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.