§1: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài cung tròn

a) Đơn vị rađian: Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 rađian, gọi tắt là cung 1 rađian. Góc ở tâm chắn cung 1 rađian gọi là góc có số đo 1 rađian, gọi tắt là góc 1 rađian
1 rađian còn viết tắt là 1 rad.
Vì tính thông dụng của đơn vị rađian người ta thường không viết rađian hay rad sau số đo của cung và góc.

b) Độ dài cung tròn. Quan hệ giữa độ và rađian:

Cung tròn bán kính R có số đo α $0 \le \alpha \le 2\pi$, có số đo a^0 $0 \le a \le 360$ và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180}.R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

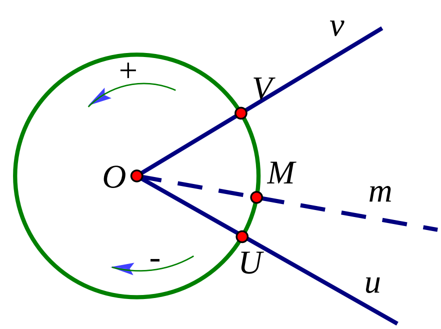
Đặc biệt: $1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, $1^0 = \frac{\pi}{180}rad$.

2. Góc và cung lượng giác.

a) Đường tròn định hướng: Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ gọi là chiều dương(cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm).

b) Khái niệm góc, cung lượng giác và số đo của chúng.

Cho đường tròn định hướng tâm O và hai tia Ou, Ov lần lượt cắt đường tròn tại U và V. Tia Om cắt đường tròn tại M, tia Om chuyển động theo một chiều(âm hoặc dương) quay quanh O khi đó điểm M cũng chuyển động theo một chiều trên đường tròn.



- Tia Om chuyển động theo một chiều từ Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói tia Om đã *quét được một **góc lượng giác** tia đầu là Ou, tia cuối là Ov*. Kí hiệu Ou, Ov
- Điểm M chuyển động theo một từ điểm U đến trùng với điểm V thì ta nói *điểm M đã vạch nên một **cung lượng giác** điểm đầu U, điểm cuối V*. Kí hiệu là $\overset{\frown}{UV}$
- Tia Om quay đúng một vòng theo chiều dương thì ta nói tia Om quay góc 360^0 (hay 2π), quay hai vòng thì ta nói nó quay góc $2.360^0 = 720^0$ (hay 4π), quay theo chiều âm một phần tư vòng ta nói nó quay góc -90^0(hay $-\frac{\pi}{2}$), quay theo chiều âm ba vòng bốn phần bảy($\frac{25}{7}$ vòng) thì nói nó quay góc $-\frac{25}{7}.360^0$ (hay $-\frac{50\pi}{7}$)…
- Ta coi số đo của góc lượng giác Ou, Ov là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$

c) Hệ thức Sa-lơ.

- Với ba tia Ou, Ov, Ow tùy ý ta có:

Sđ Ou,Ov $+$ Sđ Ov,Ow $=$ Sđ Ou,Ow $+k2\pi$ $k\in Z$

Sđ Ou,Ov $-$ Sđ Ou,Ow $=$ Sđ Ow,Ov $+k2\pi$ $k\in Z$

- Với ba điểm tùy ý U,V,W trên đường tròn định hướng ta có :

Sđ$\overset{\frown}{UV}+$Sđ$\overset{\frown}{VW}=$Sđ$\overset{\frown}{UW}+k2\pi$ $k\in Z$

Sđ$\overset{\frown}{UV}-$Sđ$\overset{\frown}{UW}=$Sđ$\overset{\frown}{WV}+k2\pi$ $k\in Z$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1 : XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN ĐẾN CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

Ngoài việc sử dụng định nghĩa góc và cung lượng giác, công thức tính độ dài cung tròn khi biết số đo, mối liên hệ giữa đơn vị độ, rađian và hệ thức salơ chúng ta cần lưu ý đến kết quả sau:

Nếu một góc(cung) lượng giác có số đo a^0 (hay $\alpha\,rad$) thì mọi góc(cung) lượng giác cùng tia đầu(điểm đầu), tia cuối(điểm cuối) với nó có số đo dạng dạng a^0+k360^0 (hay $\alpha+k2\pi\ rad$, $k\in Z$), mỗi góc(cung) ứng với mỗi giá trị của k. Từ đó hai góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: a) Đổi số đo của các góc sau ra rađian: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^0=\frac{\pi}{180}rad$ nên $72^0=72.\frac{\pi}{180}=\frac{2\pi}{5}, 600^0=600.\frac{\pi}{180}=\frac{10\pi}{3}$,

$-37^045'30''=-37^0-\left(\frac{45}{60}\right)^0-\left(\frac{30}{60.60}\right)^0=\left(\frac{4531}{120}\right)^0=\frac{4531}{120}.\frac{\pi}{180}\approx 0,6587$

b) Vì $1rad=\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$ nên $\frac{5\pi}{18}=\left(\frac{5\pi}{18}.\frac{180}{\pi}\right)^0=50^o, \frac{3\pi}{5}=\left(\frac{3\pi}{5}.\frac{180}{\pi}\right)^0=108^o$,

$-4=-\left(4.\frac{180}{\pi}\right)^0=-\left(\frac{720}{\pi}\right)^0\approx -2260^048'$.

Ví dụ 2: Một đường tròn có bán kính $36m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51^0 c) $\frac{1}{3}$

Lời giải

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180}.R$ nên

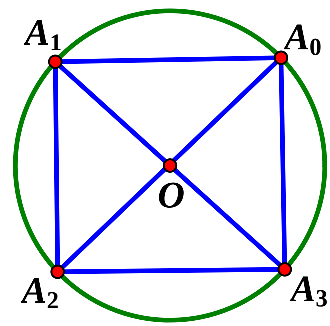
a) Ta có $l = R\alpha = 36.\frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180}.R = \frac{\pi 51}{180}.36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04m$

c) Ta có $l = R\alpha = 36.\frac{1}{3} = 12m$

Ví dụ 3: Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{A_0A_i}$, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ ($i, j = 0,1,2,3,4, i \neq j$).

Lời giải



Ta có $A_0OA_0 = 0$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_0} = k2\pi$, $k \in Z$

$A_0OA_1 = \frac{\pi}{2}$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$

$A_0OA_2 = \pi$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_1} = \pi + k2\pi$, $k \in Z$

$A_0OA_3 = \frac{\pi}{2}$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$

Như vậy sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi$, $i = 0,1,2,3$, $k \in Z$

Theo hệ thức salơ ta có sđ $\overset{\frown}{A_iA_j}$=sđ $\overset{\frown}{A_0A_j}$ − sđ $\overset{\frown}{A_0A_i}$ $+ k2\pi = \ j - i\ .\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$.

Ví dụ 4: Tìm số đo α của góc lượng giác Ou, Ov với $0 \le \alpha \le 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

a) $\frac{33\pi}{4}$ b) $-\frac{291983\pi}{3}$ c) 30

Lời giải

a) Mọi góc lượng giác Ou,Ov có số đo là $\dfrac{33\pi}{4}+k2\pi,\ k\in Z$

Vì $0\le\alpha\le 2\pi$ nên $0\le\dfrac{33\pi}{4}+k2\pi\le 2\pi,\ k\in Z\Leftrightarrow 0\le\dfrac{33}{4}+k2\le 2,\ k\in Z$

$\Leftrightarrow -\dfrac{33}{8}\le k\le -\dfrac{25}{8},\ k\in Z\Leftrightarrow k=-4$

Suy ra $\alpha=\dfrac{33\pi}{4}+\ -4\ .2\pi=\dfrac{\pi}{4}$

b) Mọi góc lượng giác Ou,Ov có số đo là $-\dfrac{291983\pi}{3}+k2\pi,\ k\in Z$

Vì $0\le\alpha\le 2\pi$ nên $0\le -\dfrac{291983\pi}{3}+k2\pi\le 2\pi,\ k\in Z\Leftrightarrow 0\le -\dfrac{291983}{3}+k2\le 2,\ k\in Z$

$\Leftrightarrow \dfrac{291983}{6}\le k\le\dfrac{291989}{6},\ k\in Z\Leftrightarrow k=$

Suy ra $\alpha=-\dfrac{291983\pi}{3}+48664.2\pi=\dfrac{\pi}{3}$

c) Mọi góc lượng giác Ou,Ov có số đo là $30+k2\pi,\ k\in Z$

Vì $0\le\alpha\le 2\pi$ nên $0\le 30+k2\pi\le 2\pi,\ k\in Z\Leftrightarrow 0\le\dfrac{15}{\pi}+k\le 1,\ k\in Z$

$\Leftrightarrow -\dfrac{15}{\pi}\le k\le\dfrac{\pi-15}{\pi},\ k\in Z\Leftrightarrow k=-4$

Suy ra $\alpha=30+\ -4\ .2\pi=30-8\pi\approx 4,867$.

Ví dụ 5: Cho góc lượng giác Ou,Ov có số đo $-\dfrac{\pi}{7}$. Trong các số $-\dfrac{29\pi}{7};\ -\dfrac{22}{7};\ \dfrac{6\pi}{7};\ \dfrac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

Lời giải

Hai góc có cùng tia đầu, tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π do đó

Vì $-\dfrac{29\pi}{7}-\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)=\ -2\ .2\pi$, $-\dfrac{22}{7}-\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)=-3\pi$, $\dfrac{6\pi}{7}-\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)=\pi$ và $\dfrac{41\pi}{7}-\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)=3.2\pi$ nên các số $-\dfrac{29\pi}{7};\ \dfrac{41\pi}{7}$ là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Ví dụ 6: Cho sđ $Ou,\ Ov\ =\alpha$ và sđ $Ou',\ Ov'\ =\beta$. Chứng minh rằng hai góc hình học $uOv,\ u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta-\alpha=k2\pi$ hoặc $\beta+\alpha=k2\pi$ với $k\in Z$.

Lời giải

Ta có sđ $Ou, Ov = \alpha$ và sđ $Ou', Ov' = \beta$ suy ra tồn tại $\alpha_0, \pi < \alpha_0 \le \pi$, $\phi_0, \pi < \beta_0 \le \pi$ và số nguyên k_0, l_0 sao cho $\alpha = a_0 + k_0 2\pi,\ \beta = \beta_0 + l_0 2\pi$.

Khi đó $\left|\alpha_0\right|$ là số đo của uOv và $\left|\beta_0\right|$ là số đo của $u'Ov'$.

Hai góc hình học $uOv,\ u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi $\left|\alpha_0\right| = \left|\beta_0\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_0 = \beta_0 \\ \alpha_0 = -\beta_0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ với $k \in Z$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 6.0: a) Đổi số đo của các góc sau ra rađian: $20^0,\ 40^0 25',\ -27^0$.(chính xác đến $0,001$)

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{17}, -\frac{2\pi}{7}, -5$.

Bài 6.1: Hai góc lượng giác có số đo $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) có thể cùng tia đầu, tia cuối được không?

Bài 6.2: Một đường tròn có bán kính $25m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{7}$ b) 49^0 c) $\frac{4}{3}$

Bài 6.3: Tìm số đo a^0 của góc lượng giác Ou, Ov với $0 \le a \le 360$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

a) 395^0 b) -1052^0 c) $20\pi\ ^0$

Bài 6.4: Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{A_0A_i}$, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ ($i, j = 0,1,2,3,4,5, i \ne j$).

Bài 6.5: Trên đường tròn lượng giác gốc A. Cho điểm M, N sao cho sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{5}$, sđ $\overset{\frown}{AN} = -\frac{\pi}{5}$. Các điểm M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\overset{\frown}{AM'}$, $\overset{\frown}{AN'}$ và $\overset{\frown}{M'N'}$.