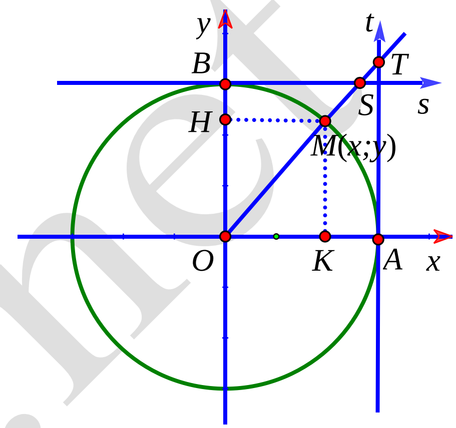
§ 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Giá trị lượng giác của góc(cung) lượng giác.

a) Đường tròn lượng giác: Đường tròn lượng giác là đường tròn đơn vị, định hướng và trên đó chọn điểm A làm gốc.

b) Tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác.



Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $OA,OM = \alpha$ gọi là điểm xác định bởi số α (hay bởi cung α, hay bởi góc α). Điểm M còn được gọi là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung(góc) lượng giác có số đo α.

Nhận xét: Ứng với mỗi số thực α có một điểm nằm trên đường tròn lượng(điểm xác định bởi số đó) tương tự như trên trục số. Tuy nhiên, mỗi điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số thực. Các số thực có dạng là $\alpha + k2\pi, k \in Z$.

d) Giá trị lượng giác sin, côsin, tang và côtang: Cho hệ trục tọa độ gắn với đường tròn lượng giác. Với mỗi góc lượng giác Ou,Ov có số đo α, xác định điểm $M\ x;y$ trên đường tròn lượng giác sao cho sđ... Khi đó ta định nghĩa

$$\cos\alpha = x,\ \sin\alpha = y$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \ \alpha \ne k\pi$$

Ý nghĩa hình học: Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox,Oy. Vẽ trục số At gốc A cùng hướng với trục Oy và vẽ trục số Bs gốc B cùng hướng với trục Ox, gọi T,S lần lượt là giao điểm của đường thẳng OM cắt với các trục sô At, Bs. Khi đó ta có:

$$\sin\alpha = \overline{OH},\ \cos\alpha = \overline{OK}, \tan\alpha = \overline{AT}, \cot\alpha = \overline{BS}$$

e) Tính chất:

- $\sin\alpha, \cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α và $-1 \le \sin\alpha \le 1, -1 \le \cos\alpha \le 1$.
- $\tan\alpha$ được xác định khi $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \ne k\pi$
- $\sin\alpha = \sin\ \ \alpha + k2\pi\ \ , \cos\alpha = \cos\ \ \alpha + k2\pi$

  $\tan\alpha = \tan\ \ \alpha + k\pi\ \ , \cot\alpha = \cot\ \ \alpha + k\pi$

f) Dấu của các giá trị lượng giác:

Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm M nằm trên đường tròn lượng giác.

Bảng xét dấu

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

g) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	–1	0	$\parallel$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$\parallel$	0	$\parallel$

2. Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2)\ 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$3)\ 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ \ (\alpha \neq k\pi)$$

$$4)\ \tan\alpha.\cot\alpha = 1\ (\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$$

3. Giá trị lượng giác của góc(cung) có liên quan đặc biệt.

Góc đối nhau (α **và** $-\alpha$ **)**	**Góc bù nhau(** α **và** $\pi-\alpha$**)**	**Góc phụ nhau(** α **và** $\frac{\pi}{2}-\alpha$ **)**
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Góc hơn kém π **(** α **và** $\pi+\alpha$ **)**	**Góc hơn kém** $\frac{\pi}{2}$**(** α **và** $\frac{\pi}{2}+\alpha$ **)**
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

Chú ý: Để nhớ nhanh các công thức trên ta nhớ câu: " cos đối sin bù phụ chéo hơn kém π tang côtang, hơn kém $\frac{\pi}{2}$ chéo sin". Với nguyên tắc nhắc đến giá trị nào thì nó bằng còn không nhắc thì đối.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: BIỂU DIỄN GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau

- Góc α và góc $\alpha + k2\pi, k \in Z$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn bởi số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m. Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $m-1$ rồi biểu diễn các góc đó.

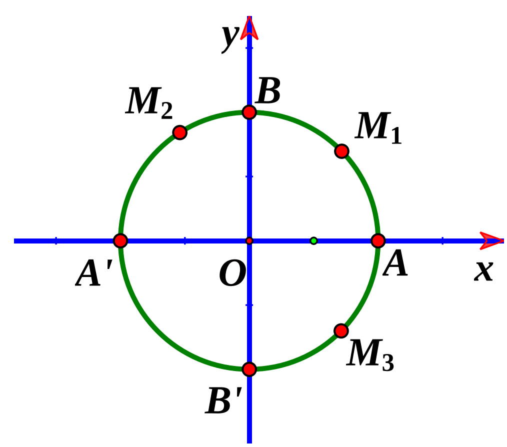
2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biểu diễn các góc(cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{11\pi}{2}$ c) 120^0 d) -765^0

Lời giải

a) Ta có $\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.



Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\frac{\pi}{4}$.

b) Ta có $-\frac{13\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \ -3\ .2\pi$ do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\frac{11\pi}{2}$ trùng với góc $-\frac{\pi}{2}$ và là điểm B'.

c) Ta có $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành ba phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 120^0.

d) Ta có $-765^0 = -45^0 + \ -2\ .360^0$ do đó điểm biểu diễn bởi góc -765^0 trùng với góc -45^0.

$\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau (chú ý góc âm)

Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ AB') là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -765^0.

Ví dụ 2 : Trên đường tròn lượng giác gốc A. Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$$x_1 = k\pi; \qquad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi; \qquad x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Lời giải

- Ta có $x_1 = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_1 = k\pi$

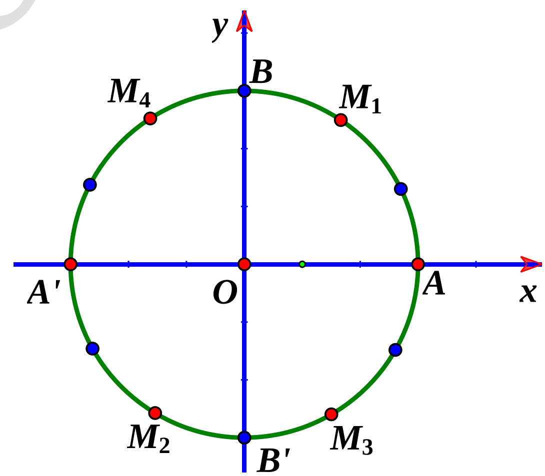
Với $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ được biểu diễn bởi điểm A

$k = 1 \Rightarrow x_1 = \pi$ được biểu diễn bởi A'

- $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_1

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_2



- $x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_3

$k = 1 \Rightarrow x_6 = \frac{2\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_4.

- Do các góc lượng giác x_1, x_2, x_3 được biểu diễn bởi đỉnh của đa giác đều $AM_1M_4A'M_2M_3$ nên các góc lượng giác đó có thể viết dưới dạng một công thức duy nhất là $x = \frac{k\pi}{3}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 6.6: Biểu diễn các góc(cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{17\pi}{4}$ c) -45^0 d) 765^0

Bài 6.7: Trên đường tròn lượng giác gốc A. Biểu diễn các góc lượng giác có số đo là $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ (k là số nguyên tùy ý).

Bài 6.8: Trên đường tròn lượng giác gốc A. Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý). $x_1=k\pi$; $x_2=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

DẠNG TOÁN 2 : XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA GÓC ĐẶC BIỆT, GÓC LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT VÀ DẤU CỦA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin\frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan(-\frac{5\pi}{4}) + \cot\frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2\sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi + 4.2\pi\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$\Rightarrow A = -\sin\frac{\pi}{6} + \cos\pi - \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$

b) Ta có $B = \frac{1}{\tan\left(8^0 + 360^\circ\right)} + \frac{2\sin\left(30^0 + 7.360^\circ\right)\cos(8^0 + 180^\circ)}{2\cos\left(-90^0 + 8^0 + 2.360^\circ\right) + \cos\left(90^0 + 8^\circ\right)}$

$$B = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2\sin 30^0\left(-\cos 8^0\right)}{2\cos\left(8^0 - 90^0\right) - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} + \frac{2.\frac{1}{2}\left(-\cos 8^0\right)}{2\cos\left(90^0 - 8^0\right) - \sin 8^0} =$$

$$= \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{2\sin 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1}{\tan 8^0} - \frac{\cos 8^0}{\sin 8^0} = 0$$

c) Vì $25^0 + 65^0 = 90^0 \Rightarrow \sin 65^0 = \cos 25^0$ do đó

$$C = \left(\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^0\right) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

d) $D = -\left(\tan\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}\right).\left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\tan\frac{5\pi}{8}\right]$

Mà $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{3\pi}{8}=\cot\frac{\pi}{8}, \tan\frac{5\pi}{8}=\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

Nên $D=-\left(\tan\frac{\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8}\right).\left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]=-1$.

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

b) $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\tan\ \pi-\alpha$

d) $\sin\frac{14\pi}{9}.\cot\ \pi+\alpha$

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Rightarrow \pi<\frac{\pi}{2}+\alpha<\frac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)<0$

b) Ta có $-\frac{\pi}{2}>-\alpha>-\pi \Rightarrow 0>\frac{3\pi}{2}-\alpha>-\frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$

c) Ta có $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Rightarrow 0<-\frac{\pi}{2}+\alpha<\frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)>0$

Và $0<\pi-\alpha<\frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan\ \pi+\alpha\ >0$

Vậy $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\tan\ \pi+\alpha\ >0$.

d) Ta có $\frac{3\pi}{2}<\frac{14\pi}{9}<2\pi \Rightarrow \sin\frac{14\pi}{9}<0$.

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2}<\pi+\alpha<2\pi$ suy ra $\cot\ \pi+\alpha\ <0$.

Vậy $\sin\frac{14\pi}{9}.\cot\ \pi+\alpha\ >0$.

3. Bài tập luyện tập:

Các bài tập sau đây đều không sử dụng máy tính bỏ túi

Bài 6.9: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\frac{\sin 405^\circ+\sin 495^\circ}{\cos 1830^\circ+\cos 3660^\circ}$

b) $B=\dfrac{1+\cos 1800^\circ \tan(-390^\circ)}{\tan(-420^\circ)}$

c) $D=\cos 0^0+\cos 20^0+\cos 40^0+...+\cos 160^0+\cos 180^0$

d) $E=\tan 5^0\tan 10^0\tan 15^0...\tan 80^0\tan 85^0$

e) $F=\cos^2 15^\circ+\cos^2 35^\circ+\cos^2 55^\circ+\cos^2 75^\circ$

Bài 6.10: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=5\sin^2\dfrac{151\pi}{6}+3\cos^2\dfrac{85\pi}{3}-4\tan^2\dfrac{193\pi}{6}+7\cot^2\dfrac{37\pi}{3}$.

b) $B=\cos^2\dfrac{\pi}{5}+\cos^2\dfrac{2\pi}{5}+\cos^2\dfrac{\pi}{10}+\cos^2\dfrac{3\pi}{10}$.

c) $C=\tan\dfrac{\pi}{9}\tan\dfrac{2\pi}{9}\tan\dfrac{5\pi}{18}\tan\dfrac{7\pi}{18}$

Bài 6.11: Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $A=\sin 50^0.\cos(-300^0)$ b) $B=\sin 215^0.\tan\dfrac{22\pi}{7}$ c) $C=\cot\dfrac{3\pi}{5}.\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Bài 6.12: Cho $0^0<\alpha<90^0$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin(\alpha+90^0)$ b) $\cot(\alpha-90^0)$

c) $\tan(270^0-\alpha)$ d) $\cos(2\alpha+90^0)$

Bài 6.13: Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $\cos(\alpha+\pi)$ b) $\tan(\alpha-\pi)$

c) $\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{5}\right)$ d) $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{8}\right)$

Bài 6.14: Cho tam giác ABC có góc A tù. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $M=\sin A+\sin B+\sin C$ b) $N=\cos A.\cos B.\cos C$

c) $P=\cos\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$ d) $Q=\cot A\tan B\cot C$

DẠNG TOÁN 3 : CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC, CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC GÓC x, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\dfrac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y} = \dfrac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \left(\sin^2 x\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos^4 x = \left(1 - \sin^2 x\right)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ nên

$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x\left(\cot^2 x + 1\right) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP$ ĐPCM.

c) Ta có $VT = \dfrac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y} = \dfrac{1}{\cot^2 y} - \dfrac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x$

$= \left(\dfrac{1}{\cos^2 y} - 1\right) - \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \dfrac{1}{\cos^2 y} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y} = VP$ ĐPCM.

d) $VT = \sqrt{\sin^4 x + 4\left(1 - \sin^2 x\right)} + \sqrt{\cos^4 x + 4\left(1 - \cos^2 x\right)}$

$= \sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{\left(\cos^2 x\right)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{\left(\sin^2 x - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\cos^2 x - 2\right)^2}$

$= \left(2 - \sin^2 x\right) + \left(2 - \cos^2 x\right) = 4 - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 3$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$VP = 3\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP$ ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A.\cot(B+C)$$

Lời giải

Vì $A + B + C = \pi$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$VP = \tan A.\cot\left(\pi - A\right) = \tan A.\left(-\cot A\right) = -1$

Suy ra $VT = VP$. ĐPCM

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

b) $B = \dfrac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$

c) $C = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sin\left(x + 2013\pi\right)}.\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$

Lời giải

a) Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos\left(\pi - x + 2.2\pi\right) = \cos\left(\pi - x\right) = -\cos x$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\cot(3\pi - x) = \cot\left(-x\right) = -\cot x$

Suy ra $A = -\cos x - \left(-\cos x\right) + \cot x + \left(-\cot x\right) = 0$

b) Ta có $\sin(900^\circ + x) = \sin\left(180^0 + 2.360^0 + x\right) = \sin\left(180^0 + x\right) = -\sin x$

$\cos\left(450^0 - x\right) = \cos\left(90^0 + 360^0 - x\right) = \cos\left(90^0 - x\right) = \sin x$

$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot\left(-x\right) = -\cot x$

$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^0 - x) = \tan(90^0 - x) = \cot x$

$\sin(x - 630^\circ) = \sin\left(x - 2.360^0 + 90^0\right) = \sin\left(x + 90^0\right) = \cos x$

$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^0 + x) = \tan(90^0 + x) = -\cot x$

$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^0 - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$

Vậy $B = \dfrac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - \left(-\cot x\right)\left(-\cot x\right)} = \dfrac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$

c) Ta có $\sin\left(x + 2013\pi\right) = \sin\left(x + \pi + 1006.2\pi\right) = \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x$ nên

$$C = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{\left(1 - \cos x\right)\left(1 + \cos x\right)}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sin x\left|\sin x\right|}\right)$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên

$$C = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\sqrt{2}\cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \dfrac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \dfrac{2 + 2\cot^2 x}{\left(\tan x - 1\right)\left(\tan^2 x + 1\right)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có Ta có $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)$

$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Do đó $A = \dfrac{1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2}{1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1} = \dfrac{3\ \ 1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\ \ 1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{3}{2}$

Vậy A không phụ thuộc vào x.

b) Ta có $B = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\tan x}}{1 - \dfrac{1}{\tan x}} - \dfrac{2 + \dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\tan x - 1\ \ \dfrac{1}{\sin^2 x}}$

$= \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \dfrac{2\ \ \sin^2 x + \cos^2 x}{\tan x - 1} = \dfrac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1$

Vậy B không phụ thuộc vào x.

c) $C = \sqrt{\ 1 - \cos^2 x\ ^2 + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\ 1 - \sin^2 x\ ^2 + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$

$= \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1}$

$= \sqrt{\ 2\cos^2 x + 1\ ^2} + \sqrt{\ 2\sin^2 x + 1\ ^2}$

$= 2\cos^2 x + 1 + 2\sin^2 x + 1$

$= 3$

Vậy C không phụ thuộc vào x.

3. Bài tập luyện tập.

Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa.

Bài 6.15: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

b) $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

c) $C = 2\sin\ \ 90^0 + x\ \ + \sin(900^0 - x) + \sin\ \ 270^0 + x\ \ - \cos\ \ 90^0 - x$

d) $D = \dfrac{\sin(5\pi + x)\cos(x - \dfrac{9\pi}{2})\tan(10\pi + x)}{\cos(5\pi - x)\sin(\dfrac{11}{2}\pi + x)\tan(7\pi - x)}$.

Bài 6.16: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$

b) $\dfrac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x\cos x} + \dfrac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$

c) $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x(\cos^2 x - \cot^2 x)$

d) $\dfrac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a.\tan^2 b} = \dfrac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a.\sin^2 b}$

Bài 6.17: Đơn giản các biểu thức sau

a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2\ 180^0 - x\ - \cos^2\ 180^0 - x$

b) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x$

c) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos^2 x + \sin x(\sin x - \cos x)}$

d) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}}.\sqrt{\dfrac{1}{1+\sin x} + \dfrac{1}{1-\sin x}}$ $(0 < x < \pi)$.

f) $(\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{\cot^2 x})(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x})$.

Bài 6.18: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α.

a) $(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - (\tan\alpha - \cot\alpha)^2$

b) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$

c) $\cot^2 30^0(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha) + 4\cos 60^0(\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) - \sin^6(90^0 - \alpha)\ \tan^2\alpha - 1\ ^3$

d) $(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1)(\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2)$

Bài 6.19: Cho tam giác ABC. Hãy rút gọn

a) $A = \cos^2\left(540^0 + \dfrac{B}{2}\right) + \cos^2\dfrac{1080^0 + A + C}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{A+C}{2}$

b) $B = \dfrac{\sin\left(\dfrac{B}{2} + 720^0\right)}{\cos\dfrac{A+C}{2}} + \dfrac{\cos\left(\dfrac{B}{2} - 900^0\right)}{\sin\dfrac{A+C}{2}} - \dfrac{\cos\ A+C}{\sin B}.\tan B$

DẠNG TOÁN 4 : TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHI BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại sô.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $90^0 < \alpha < 180^0$.

b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$

d) $\cot\alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^0 < \alpha < 180^0$ nên $\cos\alpha < 0$ mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ suy ra

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Mà $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha < 0$ suy ra $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

c) Vì $\tan\alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Ta có $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{\tan^2\alpha + 1} = \dfrac{1}{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$.

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0$ và $\tan\alpha = -2\sqrt{2} < 0$ nên $\cos\alpha < 0$

Vì vậy $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

Ta có $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -2\sqrt{2}.\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Vì $\cot\alpha = -\sqrt{2}$ nên $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{\cot^2\alpha + 1} = \frac{1}{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$ và $\cot\alpha = -\sqrt{2} < 0$ nên $\sin\alpha > 0$

Do đó $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cot\alpha.\sin\alpha = -\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2\alpha = 24$ hay $\cot\alpha = \pm 2\sqrt{6}$

Vì $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ cùng dấu và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$ nên $\tan\alpha < 0, \cot\alpha < 0$

Do đó $\cot\alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cot\alpha\sin\alpha = -2\sqrt{6}.\frac{1}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$

b) Ta có $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4\alpha - \left(1 - \sin^2\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6\sin^4\alpha - 2\left(1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin^2\alpha - 1\right)\left(2\sin^2\alpha + 3\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha - 1 = 0$ (Do $2\sin^2\alpha + 3 > 0$)

Suy ra $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $A = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Ví dụ 3: a) Cho $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. Tính $A = \dfrac{\tan\alpha + 3\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$.

b) Cho $\tan\alpha = 3$. Tính $B = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$

c) Cho $\cot\alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$

Lời giải

a) Ta có $A = \dfrac{\tan\alpha + 3\dfrac{1}{\tan\alpha}}{\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}} = \dfrac{\tan^2\alpha + 3}{\tan^2\alpha + 1} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + 2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = 1 + 2\cos^2\alpha$

Suy ra $A = 1 + 2.\dfrac{4}{9} = \dfrac{17}{9}$

b) $B = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}} = \dfrac{\tan\alpha \;\; \tan^2\alpha + 1 \;\; - \;\; \tan^2\alpha + 1}{\tan^3\alpha + 3 + 2\tan\alpha \;\; \tan^2\alpha + 1}$

Suy ra $B = \dfrac{3 \;\; 9 + 1 \;\; - \;\; 9 + 1}{27 + 3 + 2.3 \;\; 9 + 1} = \dfrac{2}{9}$

c) Ta có $C = \sin^2\alpha.\dfrac{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \sin^2\alpha\left(1 - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$

$= \dfrac{1}{1 + \cot^2\alpha} \;\; 1 - \cot\alpha + \cot^2\alpha \;\; = \dfrac{1}{1 + \;\; \sqrt{5} \;\; ^2} \;\; 1 - \sqrt{5} + 5 \;\; = \dfrac{6 - \sqrt{5}}{6}$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x\cos x$ và $\left|\sin^4 x - \cos^4 x\right|$

b) Chứng minh rằng $\left|m\right| \le \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x+\cos x=m$ nên $m^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$ hay $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{m^2-1}{2}$

Đặt $A=\left|\sin^4 x-\cos^4 x\right|$. Ta có

$A=\left|\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\right|=\left|\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)\right|$

$\Rightarrow A^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2\left(\sin x-\cos x\right)^2=\left(1+2\sin x\cos x\right)\left(1-2\sin x\cos x\right)$

$\Rightarrow A^2=\left(1+\dfrac{m^2-1}{2}\right)\left(1-\dfrac{m^2-1}{2}\right)=\dfrac{3+2m^2-m^4}{4}$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{3+2m^2-m^4}}{2}$

b) Ta có $2\sin x\cos x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$ kết hợp với (*) suy ra

$\left(\sin x+\cos x\right)^2\le 2\Rightarrow\left|\sin x+\cos x\right|\le\sqrt{2}$

Vậy $\left|m\right|\le\sqrt{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 6.20: Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a) $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ với $0^0<\alpha<90^0$

b) $\cos\beta=\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ với $0<\alpha<\pi$

c) $\tan\alpha=2$ và $\pi<\alpha<2\pi$

d) $\cos\alpha=0,8$ và $\tan\alpha+\cot\alpha>0$

Bài 6.21: a) Cho $\cos a=\dfrac{2}{3}$. Tính $A=\dfrac{\cot a+3\tan a}{2\cot a+\tan a}$

b) Cho $\sin a=\dfrac{1}{3}$. Tính $B=\dfrac{3\cot a+2\tan a+1}{\cot a+\tan a}$

c) Cho $\tan a=2$. Tính $C=\dfrac{2\sin a+3\cos a}{\sin a+\cos a}$;

d) Cho $\cot a=5$. Tính $D=2\cos^2 a+5\sin a\cos a+1$

Bài 6.22: Biết $\tan x + \cot x = m$.

a) Tìm $\tan^2 x + \cot^2 x$ b) $\dfrac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$ c) Chứng minh $|m| \geq 2$

Bài 6.23: Cho $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$. Tính $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

Bài 6.24: Cho $\tan a - \cot a = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \tan^2 a + \cot^2 a$ b) $B = \tan a + \cot a$ c) $C = \tan^4 a - \cot^4 a$

Bài 6.25: Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$. Tính $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.