Đáp án chuyên đề:
Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học – Đại số 10

Bài 1.14: Giả sử phương trình vô nghiệm và a,c trái dấu. Với điều kiện a,c trái dấu có a.c<0 suy ra
$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4(-ac) > 0$
Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều này mâu thuẫn với giả thiết phương trình vô nghiệm.
Vậy phương trình vô nghiệm thì a,c phải cùng dấu.
Bài 1.15: Giả sử trong hai số nguyên dương a và b có ít nhất một số không chia hết cho 3 , chẳng hạn a không chia hết cho 3 . Thế thì a có dạng: a = 3k+1 hoặc a = 3k+2. Lúc đó a^2 =3m+1 , nen nếu b chia hết cho 3 hoặc b không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ cũng có dạng: 3n+1 hoặc 3n+2, tức là $a^2 + b^2$ không chia hết cho 3, trái giả thiết. Vậy nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì cả a và b đều $a^2 + b^2$ chia hết cho 3.
Bài 1.16: Giả sử c không phải là cạnh nhỏ nhất của tam giác.
Không mất tínhư tổng quát, giả sử $a \le c \Rightarrow a^2 \le c^2$ (1)
Theo bất đẳng thức trong tam giác, ta có $b < a + c \Rightarrow b^2 < \ a + c\ ^2$ (2).
Do $a \le c \Rightarrow \ a + c\ ^2 \le 4c^2$ (3)
Từ (2) và (3) suy ra $b^2 \le 4c^2$ (4).
Cộng vế với vế (1) và (4) ta có $a^2 + b^2 \le 5c^2$ mâu thuẫn với giả thiết
Vậy c là cạnh nhỏ nhất của tam giác.
Bài 1.17 Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng, Khi đó, nhân theo vế của các bất đẳng thức trên ta được:
$a\ \ 1-b\ \ .b\ \ 1-c\ \ .c\ \ 1-a\ \ > \left(\frac{1}{4}\right)^3$ hay $a\ \ 1-a\ \ .b\ \ 1-b\ \ .c\ \ 1-c\ \ > \frac{1}{64}$ (*)

Mặt khác $a\ \ 1-a\ \ = -a^2 + a = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Do $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a\ \ 1-a\ \ \le \frac{1}{4}$

Tương tự thì $0 < b\ \ 1-b\ \ \le \frac{1}{4}, 0 < c\ \ 1-c\ \ \le \frac{1}{4}$

Nhân theo vế ta được $a\ \ 1-a\ \ .b\ \ 1-b\ \ .c\ \ 1-c\ \ \le \frac{1}{64}$ (**)

Bất đẳng thức (**) mâu thuẫn (*),
Vậy có ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là sai. (đpcm)
Bài 1.18: Giả sử cả hai phương trình trên vô nghiệm
Khi đó $D_1 = a_1^2 - 4b_1 < 0, D_1 = a_2^2 - 4b_2 < 0$
$\Rightarrow a_1^2 - 4b_1 + a_2^2 - 4b_2 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 < 4\ \ b_1 + b_2 \quad\ 1$
Mà $a_1 - a_2\ ^2 \ge 0 \Leftrightarrow a_1^2 + \ a_2^2 \ge 2a_1a_2$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $2a_1a_2 < 4\ \ b_1 + \ b_2$ hay $a_1a_2 < 2\ \ b_1 + \ b_2$ trái giả thiết.
Vậy phải có ít nhất 1 trong hai số Δ_1 , Δ_2 lớn hơn 0 do đó ít nhất 1 trong 2 phương trình
$x^2 + a_1x + b_1 = 0,\ x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.
Bài 1.19: Dễ dàng chứng minh được nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn
Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, tức là $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, trong đó m, n $\in \mathbb{N}^*$, $\ m,\ n\ \ = 1$

Từ $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ là số chẵn

$\Rightarrow$ m là số chẵn $\Rightarrow m = 2k,\ k \in N^*$

Từ $m^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ là số chẵn $\Rightarrow$ n là số chẵn

Do đó m chẵn, n chẵn, mâu thuẫn với $m,\ n = 1$.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Bài 1.20: Giả sử ba số $a,\ b,\ c$ không đồng thời là số dương. Vậy có ít nhất một số không dương.

Do $a,\ b,\ c$ có vai trò bình đẳng nên ta có thể giả sử : $a \le 0$

+ Nếu $a = 0$ thì mâu thuẫn với (3)

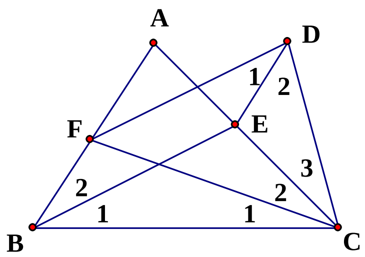
+ Nếu $a < 0$ thì từ (3) $\Rightarrow bc < 0$

Ta có (2) $\Leftrightarrow a(b+c) > -bc \Rightarrow a(b+c) > 0$

$\Rightarrow b + c < 0 \Rightarrow a + b + c < 0$ mâu thuẫn (1).

Vậy cả ba số $a,\ b,\ c$ đều dương.

Bài 1.21: • Nếu $B > C$ thì ta dựng hình bình hành BEDF như hình vẽ . Ta có :



$B > C \Rightarrow B_2 > C_2 \Rightarrow D_1 > C_2$ (1)

Ngoài ra, BE = CF $\Rightarrow$ DF = CE

$\Rightarrow D_1 + D_2 = C_2 + C_3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$D_2 < C_3 \Rightarrow EC < ED \Rightarrow EC < FB$.

Xét các tam giác BCE và CBF, ta thấy :

BC chung, BE = CF, BF > CE nên $C_1 > B_1 \Rightarrow C > B$. Mâu thuẫn.

• Trường hợp $C > B$, chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Do đó $B = C$. Vậy tam giác ABC cân tại A.

Bài 1.22: Trước hết sắp xếp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài $a_1, a_2, \ldots, a_7$ và chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối (vì điều kiện để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng của 2 đoạn lớn hơn đoạn thứ ba).

Giả sử điều cần chứng minh là không xảy ra, nghĩa là đồng thời xảy ra các bất đẳng thức sau: $a_1 + a_2 \le a_3;\ a_2 + a_3 \le a_4; \ldots;\ a_5 + a_6 \le a_7$

Từ giả thiết $a_1,\ a_2$ có giá trị lớn hơn 10, ta nhận được $a_3 > 20$. Từ $a_2 > 10$ và $a_3 > 20$ ta nhận được $a_3 > 30,\ a_5 > 50,\ a_6 > 80$ và $a_7 > 130$. Điều $a_7 > 130$ là mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100. Có mâu thuẫn này là do giả sử điều cần chứng minh không xảy ra.

Vậy, luôn tồn tại 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối. Hay nói cách khác là 3 đoạn này có thể ghép thành một tam giác.

Bài 1.23: a) Trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 là điều kiện đủ để hai đường thẳng đó song song với nhau.

Trong mặt phẳng, hai đường thẳng đó song song với nhau là điều kiện cần để hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3.

b) Số nguyên dương có chữ số tận cùng bằng 5 là điều kiện đủ để chia hết cho 5.

Số nguyên dương chia hết cho 5 là điều kiện cần để nó có chữ số tận cùng bằng 5.

c) Tứ giác là hình thoi là điều kiện đủ để nó có 2 đường chéo vuông góc với nhau

~~Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là điều kiện cần để nó là hình thoi~~

d) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có các góc tương ứng bằng nhau
Hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau
e) Số nguyên dương a chia hết cho 24 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 4 và 6
Số nguyên dương a chia hết cho 4 và 6 là điều kiện cần để nó chia hết cho 24.
Bài 1.24: a) Một tam giác là tam giác cân là điều kiện cần và đủ để nó có hai góc bằng nhau
b) Tứ giác là hình bình hành là điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
c) $x \geq y$ là điều kiện cần và đủ để $\sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{y}$
d) Điều kiện cần và đủ để tứ giác MNPQ là hình bình hành là $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
Bài 1.25:a) Một tứ giác là hình vuông là điều kiện đủ để nó có 4 cạnh bằng nhau.
Một tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình vuông.
Không có định lí đảo vì tứ giác có 4 cạnh bằng nhau có thể là hình thoi
b) Một tứ giác là hình thoi là điều kiện đủ để nó có hai đường chéo vuông góc.
Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc là điều kiện cần để nó là hình thoi
Không có định lí đảo vì tứ giác có hai đường chéo vuông góc có thể là hình vuông hoăc một đa giác bất kì có hai đường chéo vuông góc.

Bài 1.26: a) M thuộc đường tròn đường kính AB là *điều kiện cần* để MA vuông góc MB.

Hoặc có thể phát biểu : *Điều kiện cần* để $MA \perp MB$ là M thuộc đường tròn đường kính AB.

b) $a^2 + b^2 > 0$ là *điều kiện cần* để a ≠ 0 hoặc b ≠ 0.