§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $\mathrm{D} = D_f \cap D_g$.

Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là ***phương trình một ẩn***; x được gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là tập xác định của phương trình.

$x_0 \in D$ gọi là một ***nghiệm*** của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x_0) = g(x_0)$" là mệnh đề đúng.

Chú ý: Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là các hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả.

a) Phương trình tương đương: Hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ và $f_2(x) = g_2(x)$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Kí hiệu là $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

- Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là ***phép biến đổi tương đương***.

b) Phương trình hệ quả: $f_2(x) = g_2(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$.

Kí hiệu là $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$

c) Các định lý:

Định lý 1: Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định D; $y = h(x)$ là hàm số ***xác định*** trên D.
Khi đó trên D, phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$

2) $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ nếu $h(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$

Định lý 2: Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

Lưu ý: Khi giải phương trình ta cần chú ý

- Đặt điều kiện xác định(đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.
- Nếu hai vế của phương trình ***luôn cùng dấu*** thì bình phương hai vế của nó ta thu được phương trình tương đương.
- Khi biến đổi phương trình thu được phương trình hệ quả thì khi tìm được nghiệm của phương trình hệ quả phải thử lại phương trình ban đầu để loại bỏ nghiệm ngoại lai.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH.**

1. Phương pháp giải.

- Điều kiện xác định của phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có yêu cầu trong đề bài)
- Điều kiện để biểu thức
  - $\sqrt{f\left(x\right)}$ xác định là $f\left(x\right) \geq 0$
  - $\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ xác định là $f\left(x\right) \neq 0$
  - $\dfrac{1}{\sqrt{f\left(x\right)}}$ xác định là $f\left(x\right) > 0$

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $x + \dfrac{5}{x^2 - 4} = 1$ b) $1 + \sqrt{3 - x} = \sqrt{x - 2}$

c) $1 + \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3x - 2}$ d) $\sqrt{4 - 2x} = \dfrac{x + 1}{x^3 - 3x + 2}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

b) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

c) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$

d) Điều kiện xác định của phương trình là

$$\begin{cases} 4 - 2x \geq 0 \\ x^3 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \left(x - 1\right)\left(x^2 + x - 2\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \left(x - 1\right)^2\left(x - 2\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $4x + \sqrt{4x - 3} = 2\sqrt{3 - 4x} + 3$ b) $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{-3-x}$ d) $\sqrt{(x-3)^2(5-3x)}+2x=\sqrt{3x-5}+4$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}4x-3\ge 0\\3-4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{4}\\x\le\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

Thử vào phương trình thấy $x=\dfrac{3}{4}$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệp của phương trình là $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

b) Điều kiện xác định của phương trình là $-x^2+6x-9\ge 0\Leftrightarrow -(x-3)^2\ge 0\Leftrightarrow x=3$

Thay $x=3$ vào thấy thỏa mãn phương trình

Vậy tập nghiệp của phương trình là $S=\{3\}$

c) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}x\ge 0\\x-2\ge 0\\-3-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\ge 2\\x\le -3\end{cases}$

Không có giá trị nào của x thỏa mãn điều kiện

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\varnothing$

d) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}(x-3)^2(5-3x)\ge 0\\3x-5\ge 0\end{cases}$ (*)

Dễ thấy $x=3$ thỏa mãn điều kiện (*).

Nếu $x\ne 3$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}5-3x\ge 0\\3x-5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{5}{3}\\x\ge\dfrac{5}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

Vậy điều kiện xác định của phương trình là $x=3$ hoặc $x=\dfrac{5}{3}$

Thay $x=3$ và $x=\dfrac{5}{3}$ vào phương trình thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.0: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $\dfrac{5}{x^2 - x - 1} = \sqrt[3]{x}$ b) $1 + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x - 1}$

c) $1 + \sqrt{2x - 4} = \sqrt{2 - 4x}$ d) $\sqrt{2x - 6} = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Bài 3.1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $4x + 2\sqrt{4x - 3} = 2\sqrt{4x - 3} + 3$ b) $\sqrt{-x^2 + x - 1} + x = 1$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x} + 2$ d) $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + x = \sqrt{2 - x}$

➢ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ HỆ QUẢ**

1. Phương pháp giải.

Để giải phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế với một biểu thức khác không và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của phương trình ta thu được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của phương trình(hai vế luôn cùng dấu) ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $1 + \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{5}{x^2 - x - 6}$ b) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x - 2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}} - \sqrt{x - 2}$

c) $\sqrt{x + 3}(x^4 - 3x^2 + 2) = 0$ d) $\sqrt{\sqrt{x} - 1}(x^2 - x - 2) = 0$

Lời giải

a) ĐKXĐ : $\begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$1 + \frac{1}{x - 3} = \frac{5}{x - 3 \quad x + 2} \Leftrightarrow \quad x - 3 \quad x + 2 \quad + x + 2 = 5$$

$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = -3$.

b) ĐKXĐ: $x > 2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$x^2 = 1 - \quad x - 2 \quad \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) ĐKXĐ: $x \geq -3$

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 0 \\ x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x^2 - 1 \quad x^2 - 2 \quad = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là

$x = -3, x = \pm 1$ và $x = \pm\sqrt{2}$.

d) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{x} - 1} = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta có ngiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{4x^2 - 15}$

b) $.\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 8 - 3x$.

c) $|2x+1| = |x-2|$

d) $|2x+1| = x - 1$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 15 \geq 0 \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*) phương trình tương đương với

$\sqrt{2x-3}\ ^2 = \sqrt{4x^2 - 15}\ ^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 4x^2 - 15$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Thay vào điều kiện (*) ta thấy chỉ có $x = 2$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

b) ĐKXĐ: $x^2 - 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$x^2 - 3x + 4 = (8 - 3x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 9x^2 - 48x + 64$

$8x^2 - 45x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{105}}{16}$

Thay vào phương trình ta thấy chỉ có $x = \frac{45 - \sqrt{105}}{16}$ và đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

c) Phương trình tương đương với $(|2x + 1|)^2 = (|x - 2|)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = \frac{1}{3}$.

d) Ta có $|2x + 1| = x - 1 \Rightarrow (2x + 1)^2 = (x - 1)^2$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Thử vào phương trình ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn
Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm $(x;y)$ với x là số nguyên dương của phương trình sau

$$\sqrt{20 - 8x} + \sqrt{6x^2 - y^2} = y\sqrt{7 - 4x}$$

Lời giải

Nếu phương trình có nghiệm $(x;y)$ thì x phải thỏa mãn $\begin{cases} 20 - 8x \geq 0 \\ 7 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{20}{8} \\ x \leq \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$

Vì x là số nguyên dương nên $x = 1$

Thay $x = 1$ vào phương trình ta được $\sqrt{12} + \sqrt{6 - y^2} = y\sqrt{3}$ (*)

Điều kiện xác định của phương trình (*) là $6 - y^2 \geq 0$

$(*) \Rightarrow \sqrt{6-y^2} = \sqrt{3}\left(y-2\right) \Rightarrow 6-y^2 = 3\left(y-2\right)^2$

$\Rightarrow 4y^2 - 12y + 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

Thử vào phương trình (*) thấy chỉ có $y = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ là thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài là $\left(1; \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

a) $mx^2 - 2\left(m-1\right)x + m - 2 = 0$ (1) và $\left(m-2\right)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ (2)

b) $2x^2 + mx - 2 = 0$ (3) và $2x^3 + \left(m+4\right)x^2 + 2\left(m-1\right)x - 4 = 0$ (4)

Lời giải

a) Giả sử hai phương trình (1) và (2) tương đương

Ta có $\left(1\right) \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(mx - m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0 \end{array}\right.$

Do hai phương trình tương đương nên $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2)
Thay $x = 1$ vào phương trình (2) ta được

$\left(m-2\right) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -5 \end{array}\right.$

- Với $m = -5$: Phương trình (1) trở thành $-5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$

Phương trình (2) trở thành $-7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{10}{7} \end{array}\right.$

Suy ra hai phương trình không tương đương

- Với $m = 4$: Phương trình (1) trở thành $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$

Phương trình (2) trở thành $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra hai phương trình tương đương

Vậy $m = 4$ thì hai phương trình tương đương.

b) Giả sử hai phương trình (3) và (4) tương đương

Ta có $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 + mx - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0 \end{array}\right.$$

Do hai phương trình tương đương nên $x = -2$ cũng là nghiệm của phương trình (3)

Thay $x = -2$ vào phương trình (3) ta được $2(-2)^2 + m(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

- Với $m = 3$ phương trình (3) trở thành $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Phương trình (4) trở thành $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(2x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra phương trình (3) tương đương với phương trình (4)

Vậy $m = 3$.

3. Bài tập tự luyện.

Bài 3.2: Giải các phương trình sau

a) $1 + \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{6}{4-x^2}$

b) $\dfrac{2x}{\sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} - \sqrt{3-x}$

c) $\sqrt{x+1}(x^2 - 16) = 0$

d) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2 - 2x - 3} = 0$

Bài 3.3: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - 8}$

b) $\sqrt{3x^2 - x - 9} = x - 1$.

c) $|2x+3| = |2x-3|$

d) $|2x-1| = 3x - 4$

Bài 3.4: Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

a) $x^2 + mx - 1 = 0$ (1) và $(m-1)x^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (2)

b) $(2m-2)x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 17 = 0$ (3) và $(2-m)x^2 + 3x + 15 - m^2 = 0$ (4)