CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI
§1: ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

• Cho $D \subset \mathbb{R}, D \neq \varnothing$. ***Hàm số*** f xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.

• x được gọi là **biến số** (đối số), y được gọi là **giá trị** của hàm số f tại x.

Kí hiệu: $y = f(x)$.

• D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số f.

2. Cách cho hàm số

• Cho bằng bảng • Cho bằng biểu đồ • Cho bằng công thức $y = f(x)$.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in D$.

Chú ý: Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó ta nói $y = f(x)$ là ***phương trình*** của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

Cho hàm số f xác định trên K.

• Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến (tăng)** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

• Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến (giảm)** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

• Hàm số f được gọi là **hàm số chẵn** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

• Hàm số f được gọi là **hàm số lẻ** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý: *+ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.*
+ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

6: Tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

Định lý: Cho (G) là đồ thị của $y = f(x)$ và $p > 0, q > 0$; ta có

Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị $y = f(x) + q$

Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị $y = f(x) - q$

Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x + p)$

Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x - p)$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH.**

1. Phương pháp giải.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa

Chú ý : Nếu $P(x)$ là một đa thức thì:

* $\frac{1}{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \neq 0$

* $\sqrt{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$

* $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) > 0$

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4}$ b) $y = \frac{x+1}{x+1 \quad x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - 5x - 2}$ d) $y = \frac{x}{(x^2-1)^2 - 2x^2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$.

b) ĐKXĐ: $(x+1)(x^2+3x+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) ĐKXĐ: $x^3 + x^2 - 5x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{2; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

d) ĐKXĐ: $(x^2-1)^2 - 2x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x - 1)(x^2 + \sqrt{2}x - 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x - 1 \neq 0 \\ x^2 + \sqrt{2}x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{7}}{2} \\ x \neq \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2}; \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{7}}{2}; \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$ b) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

c) $y = \frac{\sqrt{5 - 3|x|}}{x^2 + 4x + 3}$ d) $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2 - 16}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 3 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{3\}$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-4x+4>0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-2)^2>0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = [-2;+\infty) \setminus \{0;2\}$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} 5-3|x| \geq 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \dfrac{5}{3} \\ \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x \leq \dfrac{5}{3} \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x \leq \dfrac{5}{3} \\ x \neq -1 \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = \left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

d) ĐKXĐ: $x^2-16>0 \Leftrightarrow |x|>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right.$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = (-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2+2x+3}$

b) $y = \dfrac{x}{x-\sqrt{x}-6}$

c) $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$

d) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi\ x \geq 1 \\ \sqrt{x+1} & khi\ x < 1 \end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x^2+2x+3 \neq 0$ đúng với mọi x

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-\sqrt{x}-6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq -2 \\ \sqrt{x} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = [0;+\infty) \setminus \{9\}$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = [-2;+\infty)$.

d) Khi $x \geq 1$ thì hàm số là $y = \dfrac{1}{x}$ luôn xác định với $x \geq 1$.

Khi $x<1$ thì hàm số là $y=\sqrt{x+1}$ xác định khi

$$\begin{cases} x<1 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x<1$$

Do đó hàm số đã cho xác định khi $x\ge -1$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=[-1;+\infty)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y=\dfrac{mx}{\sqrt{x-m+2}-1}$ với m là tham số

a) Tìm tập xác định của hàm số theo tham số m

b) Tìm m để hàm số xác định trên $(0;1)$

Lời giải

a) ĐKXĐ $\begin{cases} x-m+2\ge 0 \\ \sqrt{x-m+2}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge m-2 \\ x\ne m-1 \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=[m-2;+\infty)\backslash\{m-1\}$.

b) Hàm số xác định trên $(0;1) \Leftrightarrow (0;1)\subset[m-2;m-1)\cup(m-1;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} (0;1)\subset[m-2;m-1) \\ (0;1)\subset(m-1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m-1\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m\le 1 \end{array}\right.$$

Vậy $m\in(-\infty;1]\cup\{2\}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-3m+4}+\dfrac{x}{x+m-1}$ với m là tham số.

a) Tìm tập xác định của hàm số khi $m=1$

b) Tìm m để hàm số có tập xác định là $[0;+\infty)$

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x-3m+4\ge 0 \\ x+m-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{3m-4}{2} \\ x\ne 1-m \end{cases}$

a) Khi $m=1$ ta có ĐKXĐ : $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x\ne 0 \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{0\}$.

b) Với $1-m\ge \dfrac{3m-4}{2} \Leftrightarrow m\le \dfrac{6}{5}$ khi đó tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[\dfrac{3m-4}{2};+\infty\right)\backslash\{1-m\}$. Do đó $m\le \dfrac{6}{5}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>\dfrac{6}{5}$ khi đó tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[\dfrac{3m-4}{2};+\infty\right)$.

Do đó để hàm số có tập xác định là $[0;+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{3m-4}{2}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy $m=\dfrac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập :

Bài 2.0. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2\sqrt{x-1}}{|x|-2}$. b) $y = \sqrt{x+2} - \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

c) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+x+1}$. d) $y = x + \sqrt{x^2-4x+4}$.

e) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-x-6}$. f) $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & khi\ x \ge 1 \\ \sqrt{2-x} & khi\ x < 1 \end{cases}$

Bài 2.1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{6-3x} - \sqrt{x-1}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}}{x}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{3x-2}+6x}{\sqrt{4-3x}}$ d) $y = \sqrt{6-x} + \dfrac{2x+1}{1+\sqrt{x-1}}$

e) $y = \dfrac{2x+9}{x+4\ \ \sqrt{x+3}}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-3\sqrt{x}+2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1+4x}}}$ h) $y = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

Bài 2.2: Tìm giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y = \dfrac{x+2m+2}{x-m}$ xác định trên $-1;0$

b) Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-m+1}}$ có tập xác định là $[0;+\infty)$

Bài 2.3: Tìm giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y = \sqrt{x-m+1} + \dfrac{2x}{\sqrt{-x+2m}}$ xác định trên $-1;3$.

b) Hàm số $y = \sqrt{x+m} + \sqrt{2x-m+1}$ xác định trên $0;+\infty$.

c) Hàm số $y = \sqrt{-x-2m+6} - \dfrac{1}{\sqrt{x+m}}$ xác định trên $-1;0$.

✎ DẠNG TOÁN 2: XÉT TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ

1. Phương pháp giải.

*** Sử dụng định nghĩa**

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D :

- Hàm số chẵn $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.

- Hàm số lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Chú ý : Một hàm số có thể không chẵn cũng không lẻ
Đồ thị hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng
Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

*** Quy trình xét hàm số chẵn, lẻ.**

B1: Tìm tập xác định của hàm số.
B2: Kiểm tra
Nếu $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ Chuyển qua bước ba
Nếu $\exists x_0 \in D \Rightarrow -x_0 \notin D$ kết luận hàm không chẵn cũng không lẻ.
B3: xác định $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$.
Nếu bằng nhau thì kết luận hàm số là chẵn
Nếu đối nhau thì kết luận hàm số là lẻ
Nếu tồn tại một giá trị $\exists x_0 \in D$ mà $f(-x_0) \neq f(x_0)$, $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^3 + 2\sqrt[3]{x}$ b) $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$ d) $f(x) = \sqrt{2+x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

Lời giải

a) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = 3(-x)^3 + 2\sqrt[3]{-x} = -(3x^3 + 2\sqrt[3]{x}) = -f(x)$

Do đó $f(x) = 3x^3 + 2\sqrt[3]{x}$ là hàm số lẻ

b) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = (-x)^4 + \sqrt{(-x)^2+1} = x^4 + \sqrt{x^2+1} = f(x)$

Do đó $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2+1}$ là hàm số chẵn

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+5 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -5 \\ x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \le x \le 5$

Suy ra TXĐ: $D = [-5;5]$

Với mọi $x \in [-5;5]$ ta có $-x \in [-5;5]$ và $f(-x) = \sqrt{(-x)+5} + \sqrt{5-(-x)} = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = f(x)$

Do đó $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$ là hàm số chẵn

d) ĐKXĐ: $\begin{cases} 2+x \ge 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x < 2$

Suy ra TXĐ: $D = [-2;2)$

Ta có $x_0 = -2 \in [-2;2)$ nhưng $-x_0 = 2 \notin [-2;2)$

Vậy hàm số $f(x) = \sqrt{2+x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ không chẵn và không lẻ.

Ví dụ 2: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^4 - 4x + 2$

b) $f\left(x\right) = \left||x+2| - |x-2|\right|$

c) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} - x} - 2x^2 - 1$

d) $f(x) = \begin{cases} -1 & Khi\ x < 0 \\ 0 & Khi\ x = 0 \\ 1 & Khi\ x > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(-1) = 7,\ f(1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) \neq f(1) \\ f(-1) \neq -f(1) \end{cases}$

Vậy hàm số không chẵn và không lẻ

b) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = \left||(-x)+2| - |(-x)-2|\right| = \left||x-2| - |x+2|\right|$

Suy ra $f(-x) = f(x)$

Do đó $f\left(x\right) = \left||x+2| - |x-2|\right|$ là hàm số chẵn.

c) Ta có $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x \neq 0$ với mọi x.

Suy ra TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Mặt khác $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} + x \neq 0$ do đó

$$f(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} - 2x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = 2\left(-x\right)\sqrt{\left(-x\right)^2+1} = -2x\sqrt{x^2+1} = -f\left(x\right)$

Do đó $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} - x} - 2x^2 - 1$ là hàm số lẻ.

d) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Dễ thấy mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$

Với mọi $x > 0$ ta có $-x < 0$ suy ra $f(-x) = -1, f(x) = 1 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Với mọi $x < 0$ ta có $-x > 0$ suy ra $f(-x) = 1, f(x) = -1 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Và $f(-0) = -f(0) = 0$

Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(-x) = -f(x)$

Vậy hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & Khi\ x < 0 \\ 0 & Khi\ x = 0 \\ 1 & Khi\ x > 0 \end{cases}$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số: $f\left(x\right) = \dfrac{x^2\left(x^2-2\right) + \left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1} - m}$ là hàm số chẵn.

Lời giải

ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1} \neq m$ (*)

Giả sử hàm số chẵn suy ra $f(-x) = f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

Ta có $f(-x) = \dfrac{x^2(x^2-2)-(2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$

Suy ra $f(-x) = f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2(x^2-2)-(2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m} = \dfrac{x^2(x^2-2)+(2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 2(2m^2-2)x = 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 2m^2-2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

* Với $m=1$ ta có hàm số là $f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}-1}$

ĐKXĐ : $\sqrt{x^2+1} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

Suy ra TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dễ thấy với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ta có $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(-x) = f(x)$

Do đó $f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ là hàm số chẵn

* Với $m=-1$ ta có hàm số là $f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}+1}$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Dễ thấy với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = f(x)$

Do đó $f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}+1}$ là hàm số chẵn.

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.4:: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+5x}{x^2+4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2-1}$ c) $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x-5}{x-1}$ e) $f(x) = 3x^2-2x+1$ f) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|-1}$

g) $f(x) = \dfrac{|x-1|+|x+1|}{|2x-1|+|2x+1|}$ h) $f(x) = \dfrac{|x+2|+|x-2|}{|x-1|-|x+1|}$

Bài 2.5: Tìm m để hàm số: $y = f(x) = \dfrac{x(x^2-2)+2m-1}{x-2m+1}$ là hàm số chẵn.

Bài 2.6: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có cùng tập xác định D. Chứng minh rằng

a) Nếu hai hàm số trên lẻ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ là hàm số lẻ

b) Nếu hai hàm số trên một chẵn một lẻ thì hàm số $y = f\;\;x\;\;g\;\;x$ là hàm số lẻ

Bài 2.7: a) Tìm m để đồ thị hàm số sau nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

$y = x^3 - (m^2 - 9)x^2 + (m+3)x + m - 3$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số sau nhận trục tung làm trục đối xứng

$y = x^4 - (m^2 - 3m + 2)x^3 + m^2 - 1$.

Bài 2.8: Chứng minh rằng đồ thị hàm số sau nhận trục tung làm trục đối xứng: $y = x^2 + \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}$.

- **DẠNG TOÁN 3. XÉT TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN(ĐƠN ĐIỆU) CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG**

1. Phương pháp giải.

C1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K. Lấy $x_1, x_2 \in K;\ x_1 < x_2$, đặt $T = f(x_2) - f(x_1)$

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow T > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow T < 0$.

C2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K. Lấy $x_1, x_2 \in K;\ x_1 \neq x_2$, đặt $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow T > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow T < 0$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét sự biến thiên của hàm số sau trên khoảng $1;+\infty$

a) $y = \dfrac{3}{x-1}$ b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Lời Giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in (1;+\infty),\ x_1 \neq x_2$ ta có $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3}{x_2 - 1} - \dfrac{3}{x_1 - 1} = \dfrac{3(x_1 - x_2)}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\dfrac{3}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$

Vì $x_1 > 1,\ x_2 > 1 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ nên hàm số $y = \dfrac{3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $1;+\infty$.

b) Với mọi $x_1, x_2 \in (1;+\infty),\ x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)$$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1 - \dfrac{1}{x_1 x_2}$

Vì $x_1 > 1,\ x_2 > 1 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ nên hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ đồng biến trên khoảng $1;+\infty$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^2 - 4$

a) Xét chiều biến thiên cuả hàm số trên $-\infty;0$ và trên $0;+\infty$

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\left[-1;3\right]$ từ đó xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên $\left[-1;3\right]$.

Lời Giải

TXĐ: $D = R$

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

Ta có $T = f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) = \left(x_2^2 - 4\right) - \left(x_1^2 - 4\right) = x_2^2 - x_1^2 = \left(x_2 - x_1\right).\left(x_1 + x_2\right)$

Nếu $x_1, x_2 \in \left(-\infty;0\right) \Rightarrow T < 0$. Vậy hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;0\right)$.

Nếu $x_1, x_2 \in \left(0;+\infty\right) \Rightarrow T > 0$. Vậy hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

b) Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 4$ trên $\left[-1;3\right]$

x	-1		0		3
$y = x^2 - 4$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-1;3]} y = 5$ khi và chỉ khi $x = 3$, $\min\limits_{[-1;3]} y = -4$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$ trên tập xác định của nó.

Áp dụng giải phương trình

a) $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = 3$

b) $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x^2+9} + x$

Lời Giải

* ĐKXĐ: $\begin{cases} 4x+5 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Suy ra TXĐ: $\mathrm{D} = [1;+\infty)$

Với mọi $x_1, x_2 \in [1;+\infty)$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) = \sqrt{4x_2+5} + \sqrt{x_2-1} - \sqrt{4x_1+5} - \sqrt{x_1-1}$$

$$= \frac{4\left(x_2 - x_1\right)}{\sqrt{4x_2+5} + \sqrt{4x_1+5}} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1}}$$

$$= \left(x_2 - x_1\right)\left(\frac{4}{\sqrt{4x_2+5} + \sqrt{4x_1+5}} + \frac{1}{\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1}}\right)$$

Suy ra $\dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} = \dfrac{4}{\sqrt{4x_2+5} + \sqrt{4x_1+5}} + \dfrac{1}{\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1}} > 0$

Nên hàm số $y = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$ đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$.

a) Vì hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên

Nếu $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1)$ hay $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} > 3$

Suy ra phương trình $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = 3$ vô nghiệm

Nếu $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1)$ hay $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} < 3$

Suy ra phương trình $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = 3$ vô nghiệm

Với $x = 1$ dễ thấy nó là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) ĐKXĐ: $x \geq 1$.

Đặt $x^2 + 1 = t,\ t \geq 1 \Rightarrow x^2 = t - 1$ phương trình trở thành

$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4t+5} + \sqrt{t-1} \Leftrightarrow f\ \ x\ \ = f\ \ t$

Nếu $x > t \Rightarrow f(x) > f(t)$ hay $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} > \sqrt{4t+5} + \sqrt{t-1}$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

Nếu $x < t \Rightarrow f(x) < f(t)$ hay $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} < \sqrt{4t+5} + \sqrt{t-1}$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

Vậy $f\ \ x\ \ = f\ \ t\ \ \Leftrightarrow x = t$ hay $x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: • Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên D thì $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y\ (x < y)$ và $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y\ \forall x, y \in D$. Tính chất này được sử dụng nhiều trong các bài toán đại số như giải phương trình , bất phương trình , hệ phương trình và các bài toán cực trị.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.9: Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = 4 - 3x$

b) $y = x^2 + 4x - 5$.

c) $y = \dfrac{2}{x-2}$ trên $\ -\infty; 2\ $ và trên $\ 2; +\infty$

d) $y = \dfrac{x}{x-1}$ trên $\ -\infty; 1$

Bài 2.10: Chứng minh rằng hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Áp dụng giải phương trình sau $x^3 - x = \sqrt[3]{2x+1} + 1$

Bài 2.11: Cho hàm số $y = \sqrt{x-1} + x^2 - 2x$

a) Xét sự biến thiên của hàm số đã cho trên $[1; +\infty)$

b) Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 5]$

➢ DẠNG TOÁN 4: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ TỊNH TIẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Phương pháp giải.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D. Đồ thị hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ nằm trong mặt phẳng tọa độ với $x \in D$.

Chú ý : Điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ _đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Sử dụng định lý về tịnh tiến đồ thị một hàm số

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hai hàm số $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ khi } x > 2 \\ 2x - 1 \text{ khi } -2 \le x \le 2 \\ 6 - 5x \text{ khi } x < -2 \end{cases}$.

a) Tính các giá trị sau $f(-1)$ và $g(-3), g(2), g(3)$.

b) Tìm x khi $f(x) = 1$.

c) Tìm x khi $g(x) = 1$.

Lời giải

a) Ta có $f(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 0$, $g(-3) = 6 - 5(-3) = 21$, $g(2) = 2.2 - 1 = 3$,

$g(3) = 3^2 + 1 = 10$

b) * Ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

* Với $x > 2$ ta có $g(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

Với $-2 \le x \le 2$ ta có $g(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Với $x < -2$ ta có $g(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 6x - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x = 1 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = mx^3 - 2(m^2 + 1)x^2 + 2m^2 - m$

a) Tìm m để điểm $M(-1; 2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho

b) Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua với mọi m.

Lời giải

a) Điểm $M(-1; 2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi

$2 = -m - 2(m^2 + 1) + 2m^2 - m \Leftrightarrow m = -2$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

b) Để $N\left(x;y\right)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua, điều kiện cần và đủ là

$y=mx^3-2(m^2+1)x^2+2m^2-m,\ \forall m$

$\Leftrightarrow 2m^2\left(1-x^2\right)+m\left(x^3-1\right)-2x^2-y=0,\ \ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2=0\\ x^3-1\\ 2x^2+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua điểm $N\left(1;-2\right)$.

Chú ý: Nếu đa thức $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ với mọi $x\in K$ khi và chỉ khi $a_n=a_{n-1}=...=a_0$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng trên đồ thị C của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thỏa mãn: $\begin{cases}2x_A+y_A=3\\ 2x_B+y_B=3\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $A\in\ C\ \Leftrightarrow y_A=\dfrac{x_A^2-x_A+1}{x_A+1}$, $B\in\ C\ \Leftrightarrow y_B=\dfrac{x_B^2-x_B+1}{x_B+1}$

Do đó $\begin{cases}2x_A+y_A=3\\ 2x_B+y_B=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_A+\dfrac{x_A^2-x_A+1}{x_A+1}=3\\ 2x_B+\dfrac{x_B^2-x_B+1}{x_B+1}=3\end{cases}$ (*)

Với $x_A\neq -1,\ x_B\neq -1$ ta có

$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}3x_A^2-2x_A-2=0\\ 3x_B^2-2x_B-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}\\ x_B=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Suy ra tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thuộc đồ thị $\left(C\right)$ thỏa mãn: $\begin{cases}2x_A+y_A=3\\ 2x_B+y_B=3\end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm trên đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+3x-4$ hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Lời giải

Gọi M,N đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. $M\ \ x_0;y_0\ \ \Rightarrow N\ \ -x_0;-y_0$

Vì M, N thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases}y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4\\ -y_0=x_0^3+x_0^2-3x_0-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4\\ 2x_0^2-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4\\ x_0=\pm 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy hai điểm cần tìm có tọa độ là $(2;-2)$ và $(-2;2)$.

Ví dụ 5: a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ liên tiếp sang phải hai đơn vị và xuống dưới một đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Nêu cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -2x^2$ để được đồ thị hàm số $y = -2x^2 - 6x + 3$.

Lời giải

a) Ta tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ sang trái hai đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 + 1$ rồi tịnh tiến lên trên một đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = (x-2)^2$ hay $y = x^2 - 4x + 4$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Ta có $-2x^2 - 6x + 3 = -2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{2}$

Do đó tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -2x^2$ để được đồ thị hàm số $y = -2x^2 - 6x + 3$ ta làm như sau

Tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số $y = -2x^2$ đi sang bên trái $\dfrac{3}{2}$ đơn vị và lên trên đi $\dfrac{15}{2}$ đơn vị.

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.12: Cho hàm số $y = f\ \ x\ \ = -3x^2 + m^2x + m + 1$(với m là tham số)

a) Tìm các giá trị của m để $f\ \ 0\ \ = 5$.

b) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f\ \ x$ đi qua điểm $A\ \ 1;0$.

Bài 2.13: Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số sau luôn đi qua với mọi m.

a) $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$

b) $y = \dfrac{(m-1)x + m + 2}{x + m + 2}$

Bài 2.14: Cho hàm số $f(x) = 2x^4 + (m-1)x^3 + (m^2 - 1)x^2 + 2(m^2 - 3m + 2)x - 3$.

Tìm m để điểm $M(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho

Bài 2.15: a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ liên tiếp sang trái 2 đơn vị và xuống dưới $\dfrac{1}{2}$ đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Nêu cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^3$ để được đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 6$.