Đáp án chuyên đề:
Một số ví dụ về phương trình bậc hai hai ẩn – Đại số 10

Bài 3.54: a) Ta có $y = 5 - 2x$ thế vào phương trình hai ta được:

$$4x^2 + (5-2x)^2 = 17 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (2;1), (\frac{1}{2};4)$.

b) Ta có $y = 8 - 3x$ thay vào phương trình đầu ta được:

$x^3(8-3x) = 16 \Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(3x^2+4x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$. Vậy hệ có nghiệm là $x = y = 2$.

c) Từ phương trình 2 $\Rightarrow x^2 = 3(y^2+2)$ (3) thay vào phương trình 1 ta được :

$$x^3 - 8x = y(y^2+2) = y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2 - xy - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \end{array}\right.$$

* Với $x = 0$ thay vào (3) ta có: $y^2 + 2 = 0$ vô nghiệm.

* Với $y = \dfrac{3x^2-24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2 = 3\left(\dfrac{3x^2-24}{x}\right)^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có bốn nghiệm: $(x;y) = (\pm 3;\pm 1)$, $(\pm\sqrt{\frac{96}{14}};\mp\frac{\sqrt{78}}{13})$.

Bài 3.55: Ta có $x = m - y$ thay vào phương trình hai ta được: $2(m-y)^2 - 3y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y^2 + 4my + 1 - 2m^2 = 0$ $(*)$. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ $(*)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - (1-2m^2) \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy $|m| \geq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ là những giải trị cần tìm.

Bài 3.56: a) Đặt $S = x + y$, $P = xy$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S + 2P = 2 \\ S(S^2 - 3P) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2-S}{2} \\ S(S^2 - \dfrac{6-3S}{2}) = 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \Leftrightarrow (S-2)(2S^2+7S+8) = 0$

$\Leftrightarrow S = 2 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow x,y$ là nghiệm PT: $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = 2$.

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

b) Đặt $S = x + y;\ P = xy$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S(S^2 - 3P) = 19 \\ S(8 + P) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = -8S \\ S^3 - 3(2 - 8S) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 2 - 8S \\ S^3 + 24S - 25 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình :

$X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 3;\ X_2 = -2$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (-2;3),\ (3;-2)$.

c) $(x;y) = (1;1)$ d) $-2;0\ ,\ 0;-2\ ,\ -\sqrt{2};\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2};-\sqrt{2}$

Bài 3.57: a) Trừ vế với vế của hai phương trình trên ta được:

$x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 1 - y \end{array}\right.$.

* Với $x = y \Rightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 0, x = 3$

* Với $x = 1 - y \Rightarrow y^2 = 3y + 2(1 - y) \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y) = (0;0),\ (3;3),\ (-1;2),\ (2;-1)$.

b) Điều kiện : $x, y \neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x^2y = 3 \\ 2y^3 + y^2x = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 - y^3) + xy(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(Do $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 2(x + \frac{3}{4}y)^2 + \frac{7}{8}y^2 > 0$)

Thay vào hệ ta được: $3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1 = y$.

Vậy hệ có nghiệm: $x = y = 1$.

c) $-1;-1\ ,\ 0;0\ ,\ 1;1\ ,\ -\sqrt{3};\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3};-\sqrt{3}$ d) $1;1$

Bài 3.58: • Giả sử hệ có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào hệ ta được: $x_0^2 - 2x_0 + m = 0$ phương trình này có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

• Với $m = 1$ hệ trở thành: $\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$.Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.59: Ta thấy x=0 không thoả hệ phương trình

Xét $x \neq 0$. Đặt $x = ky$ và thay vào hệ ta được: $\begin{cases} 3x^2 + 5tx^2 - 4t^2x^2 = 38 \\ 5x^2 - 9tx^2 - 3t^2x^2 = 15 \quad (*) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3+5t-4t^2) = 38 \\ x^2(5-9t-3t^2) = 15 \end{cases} \Rightarrow 15 \;\; 3+5t-4t^2 \;\; = 38 \;\; 5-9t-3t^2$

$\Leftrightarrow 54t^2 + 417t - 145 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{145}{18} \end{array} \right.$

Với $t = \dfrac{1}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \end{array} \right.$

Với $t = -\dfrac{145}{18}$ thì (*)$\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{15.108}{12655}$: Phương trình vô nghiệm

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Bài 3.60: Dễ thấy $x = 0$ không thoả hệ

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$, thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2(3+2k+k^2) = 11(*) \\ x^2(1+2k+3k^2) = 17 \end{cases}$

Suy ra $17 \;\; 3+2k+k^2 \;\; = 11 \;\; 1+2k+3k^2$

$\Leftrightarrow 16k^2 - 12k - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{5}{4} \\ k = 2 \end{array} \right.$

Thay vào (*) ta được:

- k = $-\dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{33}{16}x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}.\dfrac{4}{\sqrt{3}} = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}.(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}) = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{array} \right.$
- $k = 2 \Rightarrow 11x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{array} \right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x;y$ là $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}};\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right);\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}};-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right);\;1;2\;;\;-1;-2$

Bài 3.61: Dễ thấy y = 0 không phải là nghiệm của hpt.
Đặt $x = ty$, ta có :

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} t^2y^2 - 4ty^2 + y^2 = m \\ y^2 - 3ty^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2-4t+1) = m \\ y^2(1-3t) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-4t+1}{1-3t} = \dfrac{m}{4} \\ y^2(1-3t) = 4 \end{cases}$ (I)

Do $y \neq 0$ nên từ $y^2\left(1-3t\right)=4 \Rightarrow 1-3t>0 \Leftrightarrow t<\frac{1}{3}$

a) Với $m=1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{t^2-4t+1}{1-3t}=\dfrac{1}{4} \\ y^2(1-3t)=4 \end{cases}$

Ta có nghiệm là $\left(1;4\right), \left(-1;-4\right)$.

b) Ta có : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(t^2-4t+1)=m(1-3t) \\ y^2(1-3t)=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2-(16-3m)t+4-m=0 \ (*) \\ y^2(1-3t)=4 \end{cases}$

Đặt $f\left(t\right)=4t^2-\left(16-3m\right)t+4-m$ thì

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm thoả mãn $t<\frac{1}{3} \Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số

$f\left(t\right)=4t^2-\left(16-3m\right)t+4-m$ với $t \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ cắt trục hoành $\Leftrightarrow \forall m$

Bài 3.62: a) ĐKXĐ : $\begin{cases} x \geq y \\ x \geq -y \end{cases}$

$\sqrt{x+y}=\sqrt[3]{x+y} \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^6=(\sqrt[3]{x+y})^6$

$\Leftrightarrow (x+y)^3=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x+y=1 \end{array}\right.$.

Thay $x=-y$ vào $\sqrt{x-y}=\sqrt[3]{x-y-12}$ ta được $y=-2 \Rightarrow x=2$.

b) Đặt $a=x+y+\frac{1}{x+y}, b=x-y$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13 \\ (x+y+\dfrac{1}{x+y})+x-y=1 \end{cases}$ nên ta có:

$\begin{cases} 5(a^2-2)+3b^2=13 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2+3b^2=23 \\ a+b=1 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2};\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{3}{4};-\frac{11}{4}\right),\left(\frac{3}{2};-2\right)$.

Bài 3.63: a) Điều kiện: $x,y>0$

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)+(-\sqrt{xy})=7\\(x+y)(-\sqrt{xy})=-78\end{cases}$$

Suy ra $x+y$ và $-\sqrt{xy}$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-7t-78=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=13\\t=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=13\\-\sqrt{xy}=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=13\\xy=36\end{array}\right.$$

Suy ra x,y là nghiệm của phương trình: $u^2-13u+36=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=4\\u=9\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=9\end{cases}\\\begin{cases}x=9\\y=4\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là $4,9$, $9,4$.

b) Điều kiện :x≥ 0,y≥ 0

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{4xy}=16\\x+y+\sqrt{4xy}=16\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2+2y^2}=x+y\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=0\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}\Leftrightarrow x=y=4$$

Vậy hệ có nghiệm là $4;4$.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}S=\sqrt{x}+\sqrt{y}\\P=\sqrt{xy}\end{cases}$, điều kiện $S,P\geq 0$ và $S^2-4P\geq 0$

Khi đó hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}\sqrt{\left[\sqrt{x}+\sqrt{y}\ ^2-2\sqrt{xy}\right]^2-2xy}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{S^2-2P\ ^2-2P^2}+\sqrt{2P}=8\sqrt{2}\\S=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{P^2-32P+128}=8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8-P\geq 0\\P^2-32P+128=(8-P)^2\end{cases}\Leftrightarrow P=4$$

Vậy ta được: $\begin{cases}S=4\\P=4\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\\sqrt{xy}=4\end{cases}\Leftrightarrow x=y=4$

Bài 3.64: a) Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -x \\ y\le x \end{cases} \Leftrightarrow -x\le y\le x \Rightarrow x\ge 0$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ \dfrac{1}{2}(x+y)^2\dfrac{1}{2}(x-y)^2=128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=256 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x+y} \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases}, u,v\ge 0$

Ta được: $\begin{cases} u+v=4 \\ u^4+v^4=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv(uv-32) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} uv=0 \\ uv=32 \end{array}\right. \\ u+v=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=32 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} u+v=4 \\ uv=0 \end{cases}$

Giải hệ ta được nghiệm là $8,8$; $8,-8$.

b) Hệ có nghiệm là $4;9$, $9;4$

c) Hệ có nghiệm là $8;64$, $64;8$

Bài 3.65: • Giả sử hệ có nghiệm $(x_0,y_0)\Rightarrow(y_0-2,x_0+2)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình. Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0=y_0-2$

Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} \sqrt{y_0-1}+\sqrt{y_0-1}=a \\ y_0-2+y_0=2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y_0-1}=a \\ 2y_0=2a+3 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{2(2a+3)-1}=a \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ 4a-2=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=2+\sqrt{6}$

• Với $a=2+\sqrt{6}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6} \\ x+y=2(2+\sqrt{6})+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6} \\ (x+1)+(y-1)=5+2\sqrt{6} \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ v=\sqrt{y-1} \end{cases}; u,v\ge 0$. Ta được: $\begin{cases} u+v=2+\sqrt{6} \\ u^2+v^2=5+2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2+\sqrt{6} \\ uv=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Suy ra u,v là nghiệm phương trình:

$$t^2-(2+\sqrt{6})t+\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})=0 \Leftrightarrow t=\frac{2+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow u=v=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{y-1} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+4\sqrt{6}}{4} \\ y = \dfrac{14+4\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $a = 2+\sqrt{6}$.

Bài 3.66: a) Ta có: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\ ^{2} - 3xy = 3\ x-y \\ xy = 2\ x-y\ ^{2} \end{cases}$

Đặt $u = x-y, v = xy$. Hệ trở thành $\begin{cases} u^2 - 3u + v = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$. hoặc $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$

Từ đó giải được các nghiệm của hệ là $\ 0;0\ ,\ 2;1\ ,\ -1;-2\ $.

b) $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2+y) + xy = -\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $a = x^2 + y; b = xy$

Ta có: $\begin{cases} a + ab + b = -\dfrac{5}{4} \\ a^2 + b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{5}{4} - a^2 \\ a + a(-\dfrac{5}{4} - a^2) - \dfrac{5}{4} - a^2 = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{5}{4} - a^2 \\ a^3 + a^2 + \dfrac{1}{4}a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\dfrac{1}{2} \\ xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x;y) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\dfrac{24}{16}}\right), \left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 3.67: a) Vì $y = 0$ không thỏa hệ đã cho nên hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$

Đặt $a = x + \dfrac{1}{y};\ b = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{y^2} = a^2 - 2b$.

Ta có hệ là $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+a-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-5 \\ b=12 \end{cases}$.

$* \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3} \\ x=3 \Rightarrow y=1 \end{array} \right.$

$* \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-5 \\ \dfrac{x}{y}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+12=0 \\ x=12y \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(1;\frac{1}{3}),\ (3;1)$.

b) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta biến đổi hệ trở thành

$\begin{cases} 2y\dfrac{1}{x^3}(\dfrac{1}{x^3}+2y)=6 \\ \dfrac{1}{x^6}+(2y)^2=5 \end{cases}$. Đặt $a=2y,\ b=\dfrac{1}{x^3}$, ta có hệ

$\begin{cases} ab(a+b)=6 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{6}{ab} \\ (a+b)^2-2ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{6}{ab} \\ 2a^3b^3+5a^2b^2-36=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ v $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

$* \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$. $* \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm : $(x;y)=(1;1),\ (\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{2})$.

c) Nếu $x=0$ thay vào hệ $\Rightarrow y=0 \Rightarrow x=y=0$ là một nghiệm của hệ

Với $x \neq 0$ ta có hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y-1 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}=4y-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y-1 \\ (x+\dfrac{y}{x})^2=6y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y-1 & (1) \\ (2y-1)^2=6y-3 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2; y = \frac{1}{2}$.

* $y = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2$.

* $y = \frac{1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + \frac{1}{2x} = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $(x;y) = (0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

Bài 3.68: a) Nhân phương trình thứ hai của hệ với 3 và cộng hai phương trình theo vế ta có

$$x^3 + 3x^2 + 3y^2(x+1) - 24xy = 6xy + 30y - 78x - 76$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 76) + 3y^2(x+1) - 30y(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76) = 0 \quad (*)$$

Do $x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76 = (x+1)^2 + 3(y-5)^2 \geq 0$ và không có đẳng thức xảy ra nên (*) tương đương với $x = -1$. Thay vào hệ ta tìm được $y = -3, y = 5$.

b) Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(6x^2 - 12x + 8) + (9y^2 + 12y + 27) = 35$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$x^3 - y^3 = (6x^2 - 12x + 8) + (9y^2 + 12y + 27) \Leftrightarrow (x-2)^3 = (y+3)^3 \Leftrightarrow x = y + 5$$

Lại thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2(y+5)^2 + 3y^2 = 4(y+5) - 9y \Leftrightarrow 5y^2 + 25y + 30 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y+2)(y+3) = 0 \Leftrightarrow y = -2 \vee y = -3.$$

Với $y = -2$, ta có $x = 3$, với $y = -3$, ta có $x = 2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x,y) = (-2,3),(-3,2)$.

Bài 3.69: Điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases}$

Ta thấy $x = 0\ (y = 0)$ không là nghiệm của hệ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \\ \frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \end{cases}$$

Suy ra $\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y} = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right) = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} - 4y\sqrt{y} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ ta có: $t^3 - 2t^2 + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 4y$

Từ đó ta tìm được $\begin{cases} x = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{4} \\ y = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{16} \end{cases}$.

Bài 3.70: a) Đặt: $u = \sqrt[3]{3x+1}$ và $v = \sqrt[3]{3x-1}$

(6) trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 + u.v = 1 \\ u^3 - v^3 = 2 \end{cases} \Rightarrow u - v = 2 \Rightarrow u = v + 2$

Do đó: $\left(v+2\right)^2 + v^2 + v\left(v+2\right) = 1$

$\Leftrightarrow 3v^2 + 6v + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(v+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow v = -1 \Rightarrow u = 1$

Vậy ta có: $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x+1} = 1 \\ v = \sqrt[3]{3x-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

b) ĐKXĐ: $0 \le x \le 2$.

Đặt $a = \sqrt[4]{x};\ b = \sqrt[4]{17-x};\ a,b \ge 0$. Ta có hệ phương trình

$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a^2b^2 - 18ab + 32 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \ V \ ab = 16 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} V \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} x = 1 \\ x = 16 \end{matrix}\right.$.
- Với $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 16 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.Vậy phương trình đã cho có hai ngiệm $x = 1; x = 16$.

Bài 3.71: a) ĐKXĐ: $x \ge -3$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2 = \sqrt{\dfrac{(x+1)+2}{2}} \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2} + 1}$.

Đặt $t = x + 1; y = \sqrt{\dfrac{x+1}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{t}{2} + 1} \Rightarrow y^2 - 1 = \dfrac{t}{2}$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}y \\ y^2 - 1 = \dfrac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow (t-y)(t+y+\dfrac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t = y \\ y = -t - \dfrac{1}{2} \end{matrix}\right.$

* $t = y \Leftrightarrow t^2 - 1 = \dfrac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (thỏa đk $x \ge -3$)

*

$y=-t-\frac{1}{2} \Rightarrow (t+\frac{1}{2})^2-1=\frac{t}{2} \Leftrightarrow 4t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$
(thỏa đk $x\ge -3$).

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4};x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$.

b) ĐKXĐ: $x\ge 2$

Phương trình $\Leftrightarrow (2x+1)^2+3x=2\sqrt{2(2x+1)-3x}$

Đặt $t=2x+1;y=\sqrt{2t-3x} \Rightarrow y^2+3x=2t \Rightarrow$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases} t^2+3x=2y \\ y^2+3x=2t \end{cases} \Rightarrow (t-y)(t+y+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=t \\ y=-t-2 \end{array}\right.$.

* $y=t \Leftrightarrow t^2-2t+3x=0 \Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$.

* $y=-t-2 \Rightarrow t^2+3x+2(t+2)=0 \Leftrightarrow 4x^2+11x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-1;x=-\frac{7}{4};x=\frac{1}{4}$.

Cách khác : $pt \Leftrightarrow 4x^2+8x+4=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$

c) Ta có phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$

Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3 \Rightarrow (2y-3)^3=3x-5$, khi đó ta có hệ phương trình

$\begin{cases} (2x-3)^3=2y-3+x-2 \\ (2y-3)^3=2x-3+x-2 \end{cases} \Rightarrow a^3-b^3=b-a$ (Với $a=2x-3;b=2y-3$)

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow (2x-3)^3=3x-5$

$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0 \Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=2;x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Bài 3.72: a) ĐK: $0\le x\le \sqrt{2}$.

Đặt $a=\sqrt{x};b=2-\sqrt{x}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=2 \\ a^4+b^4=2 \end{cases}$ (I)

(I)$\Leftrightarrow a=b=1 \Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) ĐKXĐ: $x\le \sqrt[3]{2}$

Đặt $a = \sqrt[3]{2-x^2},\ a \geq 0 \Rightarrow a^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow a^3 + x^2 = 2$

Mặt khác từ phương trình ban đầu $\Rightarrow a = \sqrt{2 - x^3} \Leftrightarrow x^3 + a^2 = 2$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^3 + x^2 = 2 \\ x^3 + a^2 = 2 \end{cases}$ trừ hai phương trình của hệ ta được

$a^3 - x^3 - (a^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2 + ax + x^2 - a - x) = 0$ (*)

Ta có: $a^2 + ax + x^2 - a - x = a^2 + (a+x)(x-1)$

* Với $x \geq 1 \Rightarrow a + x > 0 \Rightarrow (a+x)(x-1) \geq 0 \Rightarrow a^2 + (a+x)(x-1) > 0$

* Với $0 \leq x < 1 \Rightarrow a \geq 1 \Rightarrow a^2 + ax + x^2 - a - x = a(a-1) + ax + x(a-1) > 0$

* Với $x < 0 \Rightarrow a + x < 0 \Rightarrow (a+x)(x-1) > 0 \Rightarrow a^2 + (a+x)(x-1) > 0$

$\Rightarrow a^2 + ax + x^2 - a - x > 0 \quad \forall x$

Do đo $(*) \Leftrightarrow a = x$ thay vào hệ ta được:

$\sqrt{2-x^3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt[3]{2} \\ x^3 + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 3.73: Đặt $y = 4x^3 - x + 3$. (1) có dạng: $\begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 4x^3 - x + 3 = y \end{cases} (I)$ (I)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 2x^3 + 2y^3 - (x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3(2) \\ (x+y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1) = 0(3) \end{cases}$

TH1: $y = -x$ kết hợp(2), có nghiệm của (1): $x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$

TH2: $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0; \Delta'_x = 2 - 3y^2$. Nếu có nghiệm thì $|y| \leq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Tương tự cũng có $|x| \leq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Khi đó VT (2) $\leq 4\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^3 = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} < 3$. Chứng tỏ TH2 vô nghiệm.

KL (1) có 1 nghiệm $x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$

Bài 3.74: a) Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$ phương trình tương đương với $\ x-1\ ^3 + x + 1 = x^2\sqrt[3]{x^2(x-1) - x - 1}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x^2(x-1) - x - 1} \\ v = x - 1 \end{cases} \Rightarrow u^3 + x + 1 = x^2 v$

Phương trình trở thành $v^3 + x + 1 = x^2 v$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3 + x + 1 = x^2 v \\ v^3 + x + 1 = x^2 v \end{cases}$

$\Rightarrow u^3 - v^3 = x^2(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2+uv+v^2+x^2 = 0 \end{array}\right.$

Với $u = v$ ta có $(x-1)^3 + x + 1 = x^2(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (loại $x = 0$)

Với $u^2+uv+v^2+x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow u = v = x = 0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

b) Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3x+4} + 2x + 3 = (x+1)^3$

Đặt $y+1 = \sqrt[3]{3x+4}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^3 = 2x+y+4 \\ (y+1)^3 = 3x+4 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ, vế theo vế, ta được

$(x-y)\left[(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2\right] = y - x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ (x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$

Suy ra

$x+1 = \sqrt[3]{3x+4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 3x+4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x = 1, x = -2$.