

Đáp án chuyên đề:

Tích của một vector với một số - Hình học 10

Bài 1.26: a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{AN} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{NC} + \vec{CM} = \vec{NM}$$

Suy ra $\left| \vec{AN} + \frac{1}{2}\vec{CB} \right| = MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

b) Theo quy tắc trừ ta có

$$\frac{1}{2}\vec{BC} - 2\vec{MN} = \vec{BM} - \vec{BA} = \vec{AM}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}\vec{BC} - 2\vec{MN} \right| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua C , điểm E là đỉnh của hình bình hành $ABEF$, theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AF} = \vec{AE}$$

Gọi I là hình chiếu của E lên AC .

$$\text{Vì } AB // EF \Rightarrow \angle EIF = \angle CAB = 60^\circ$$

$$\sin \angle IFE = \frac{IE}{EF} \Rightarrow IE = EF \cdot \sin \angle IFE = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \angle IFE = \frac{IF}{EF} \Rightarrow IF = EF \cdot \cos \angle IFE = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$AE = \sqrt{AI^2 + IE^2} = \sqrt{\left(2a + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{28}}{2}$$

Suy ra $\left| \vec{AB} + 2\vec{AC} \right| = AE = \frac{a\sqrt{28}}{2}$.

d) Lấy các điểm H, K sao cho $0,25\vec{MA} = \vec{MH}$; $\frac{3}{2}\vec{MB} = \vec{MK}$

Suy ra $0,25\vec{MA} - \frac{3}{2}\vec{MB} = \vec{MH} - \vec{MK} = \vec{KH}$

$$\text{Do đó } \left| 0,25\vec{MA} - \frac{3}{2}\vec{MB} \right| = KH = \sqrt{\left(\frac{AM}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}MB\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{8}$$

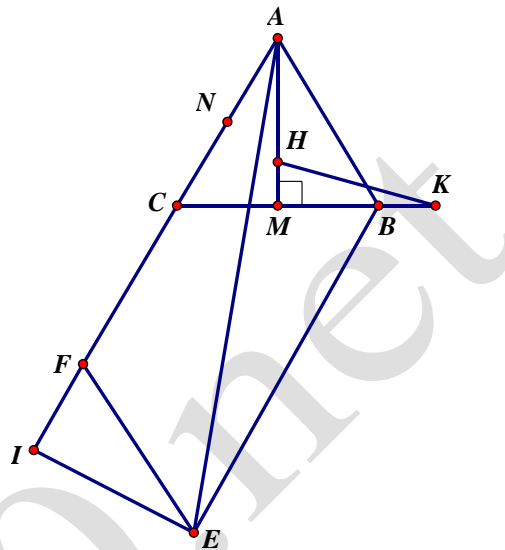
Bài 1.27: Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{MO} + \vec{OA} - 2\vec{MO} + \vec{OB} + 3\vec{MO} + \vec{OC} - 2\vec{MO} + \vec{OD} \\ &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + 3\vec{OC} - 2\vec{OD} \end{aligned}$$

Mà $\vec{OD} = -\vec{OB}$, $\vec{OC} = -\vec{OA}$ nên $\vec{u} = -2\vec{OA}$

Suy ra \vec{u} không phụ thuộc vào vị trí điểm M

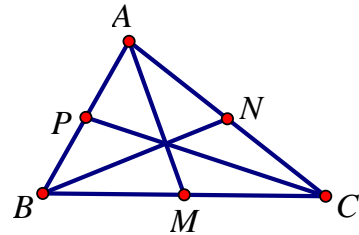


b) $|\vec{u}| = |-2\vec{OA}| = 2OA = a\sqrt{2}$

Bài 1.28: (hình 1.49)

a) $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} =$
 $= \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{BC} + \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{CA} + \vec{CB} = \vec{0}$ b)

$\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} =$
 $\frac{1}{2} \vec{OB} + \vec{OC} + \frac{1}{2} \vec{OC} + \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OA} + \vec{OB}$
 $= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$



Hình 1.49

Bài 1.29: a) Ta có $\vec{AH} = 2\vec{AG} - \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AC} + \vec{AB} - \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AC} - \frac{1}{3} \vec{AB}$

$\vec{CH} = \vec{AH} - \vec{AC} = -\frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AC}$

b) $\vec{MH} = \frac{1}{2} \vec{AH} - \vec{AB} + \vec{CH} = \frac{1}{6} \vec{AC} - \frac{5}{6} \vec{AB}$

Bài 1.30: Ta có $\frac{MC}{BC} \vec{AB} + \frac{MB}{BC} \vec{AC} = \frac{MC}{BC} \vec{AM} + \vec{MB} + \frac{MB}{BC} \vec{AM} + \vec{MC}$
 $= \vec{AM} + \frac{MC}{BC} \vec{MB} + \frac{MB}{BC} \vec{MC} = \vec{AM}$

Bài 1.31: Ta có:

$\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{AB} - \vec{AB'} + \vec{AC'} - \vec{AC} + \vec{AD} - \vec{AD'}$
 $= \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC} - \vec{AB'} + \vec{AD'} + \vec{AC} = \vec{0}$

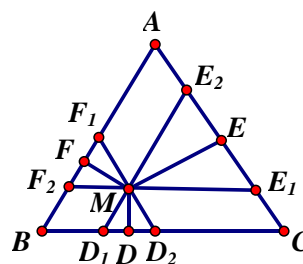
Bài 1.15: (hình 1.50) Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh ΔABC , các đường thẳng này lần lượt cắt tại các điểm như hình vẽ. Dễ

thấy ta có các tam giác đều $MD_1D_2, ME_2E_2, MF_1F_2$ và các hình bình hành $MF_1AE_2, ME_1CD_2, MD_1BF_2$.

Ta có: $\vec{MD} = \frac{1}{2} (\vec{MD}_1 + \vec{MD}_2)$,

$\vec{ME} = \frac{1}{2} (\vec{ME}_1 + \vec{ME}_2)$,

$\vec{MF} = \frac{1}{2} (\vec{MF}_1 + \vec{MF}_2)$.



Hình 1.50

Cộng từng vế 3 đẳng thức và nhóm ta được: $\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} = \frac{3}{2} \vec{MO}$

Bài 1.32: Ta gọi M là trung điểm AB và M' là hình chiếu của M lên d. Khi đó, ta có:

$\vec{AA'} + \vec{BB'} = 2\vec{MM'}$

Gọi N là trung điểm của GC (ta cũng có G là trung điểm MN) và N' là hình chiếu của nó lên d thì:

$$\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{NN'}, \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{NN'} = 2\overrightarrow{GG'}$$

Từ ba đẳng thức trên ta có đpcm.

Bài 1.33: Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

Vì ngũ giác đều nên vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ cùng phương với \overrightarrow{OF} nên \vec{u} cùng phương với \overrightarrow{OF} .

Tương tự \vec{u} cùng phương với \overrightarrow{OE} suy ra $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài 1.34: Giả sử n vector là $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Đặt $\vec{u} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$

Vì tổng của $n - 1$ vector bất kì trong n vector trên cùng phương với vector còn lại do đó \vec{u} cùng phương với hai vector \vec{a}_1, \vec{a}_2 nên $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài 1.35: (hình 1.51)

a) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC ta có

$$a = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right); b = r \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right); c = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right)$$

Theo ví dụ 5 ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \overrightarrow{IA} + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \overrightarrow{IB} + \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

b) Ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$

Theo câu a) ta có

$$\cot \frac{A}{2} \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \cot \frac{B}{2} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \cot \frac{C}{2} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

Suy ra $\cot \frac{A}{2} \overrightarrow{IM} + \cot \frac{B}{2} \overrightarrow{IN} + \cot \frac{C}{2} \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

c) Ta có

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IN}; \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IP}$$

Kết hợp ví dụ 5 suy ra

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow b + c - a \overrightarrow{IM} + a + c - b \overrightarrow{IN} + a + b - c \overrightarrow{IP} = \vec{0}$$

d) $\overrightarrow{ID} = \frac{DC}{BC} \overrightarrow{IB} + \frac{DB}{BC} \overrightarrow{IC} = \frac{p-c}{a} \overrightarrow{IB} + \frac{p-b}{a} \overrightarrow{IC}$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{ID} = p-c \overrightarrow{IB} + p-a \overrightarrow{IC} \text{ với } p \text{ là nửa chu vi.}$$

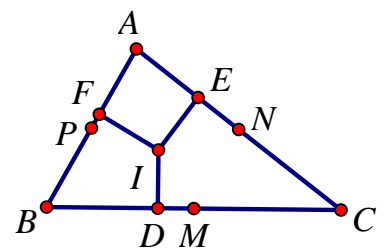
Tương tự ta có :

$$b\overrightarrow{IE} = p-a \overrightarrow{IC} + p-c \overrightarrow{IA}; c\overrightarrow{IF} = p-b \overrightarrow{IA} + p-a \overrightarrow{IB}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = 2p-b-c \overrightarrow{IA} + 2p-c-a \overrightarrow{IB} + 2p-a-b \overrightarrow{IC}$$

$$= a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \Rightarrow a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BE} + c\overrightarrow{CF} = \vec{0}$$

Bài 1.36: (hình 1.52)Gọi A' là giao điểm AM với BC ta



Hình 1.51

có $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC} \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \overrightarrow{MC}$ (*)

Mặt khác $\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} \Rightarrow \frac{A'C}{A'B} + 1 = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} + 1$
 $\Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAB} + S_{MAC}}$

Và $\frac{A'C}{BC} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB} + S_{MAC}}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{MA'} = -\frac{MA'}{MA} \overrightarrow{MA} = -\frac{S_{MBC}}{S_{MAB} + S_{MAC}} \overrightarrow{MA}$ (2)

Thay (1) và (2) vào (*) ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.37: (hình 1.53) Ta chứng minh bằng quy nạp

Với $n = 3$ đẳng thức trở thành $a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 = \vec{0}$

(đúng vì đẳng thức này tương đương với đẳng thức ở bài 11)

Giả sử đúng với $n = k - 1, k \geq 4$

Gọi \vec{e} là vectơ đơn vị vuông góc với A_1A_{k-1} và hướng ra ngoài tam giác $A_1A_{k-1}A_k$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$A_1A_2e_1 + A_2A_3e_2 + \dots + A_{k-2}A_{k-1}e_{k-2} + A_{k-1}A_1-\vec{e} = \vec{0}$ (1)

Mặt khác xét tam giác $A_1A_{k-1}A_k$ ta có $A_1A_{k-1}\vec{e} + A_{k-1}A_k\vec{e}_{k-1} + A_kA_1\vec{e}_k = \vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.38: (hình 1.54) Gọi $B_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các tiếp điểm đường tròn nội tiếp với cạnh A_iA_{i+1}

Xét tứ giác $A_1B_1IB_n$ có $A_1B_nI = A_1B_1I = 90^\circ$ và

$B_nA_1I = B_1A_1I$

Suy ra $B_nIA_1 = B_1IA_1$. Mặt khác $IB_1 = IB_n$ do đó $IA_1 \perp B_1B_n$

Tương tự ta có $IA_i \perp B_{i-1}B_i, i = 2, 3, \dots, n$

Xét đa giác lồi $B_1B_2 \dots B_n$ theo định lý con nhím ta có

$B_nB_1e_1 + B_1B_2e_2 + \dots + B_{n-1}B_ne_n = \vec{0}$

$\Leftrightarrow IB_1 \cdot \cos \frac{A_1}{2} e_1 + IB_2 \cdot \cos \frac{A_2}{2} e_2 + \dots + IB_n \cdot \cos \frac{A_n}{2} e_n = \vec{0}$

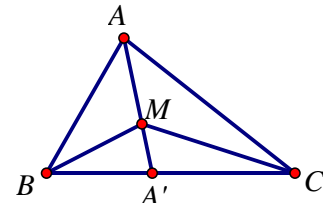
Mà $IB_1 = IB_2 = \dots = IB_n$ suy ra đpcm.

Bài 1.39: Ta có $\frac{HB}{HC} = \frac{HB \cdot BC}{HC \cdot BC} = \frac{c^2}{b^2}$,

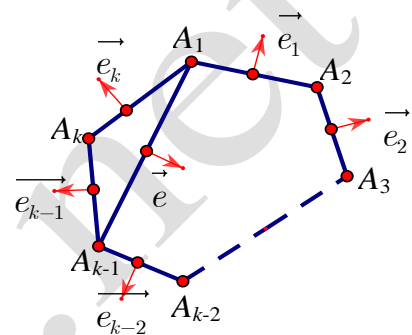
Suy ra $\overrightarrow{IH} = \frac{b^2}{c^2 + b^2} \overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{c^2 + b^2} \overrightarrow{IC}$

Mà $b^2 + c^2 = a^2$ và $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IA}$ nên suy ra $-\overrightarrow{IA} = \frac{b^2}{a^2} \overrightarrow{IB} + \frac{c^2}{a^2} \overrightarrow{IC}$

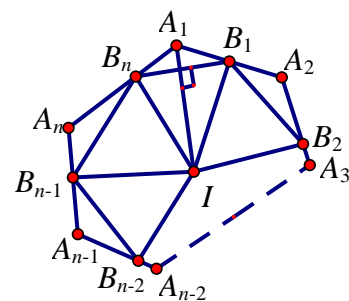
Hay $a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.



Hình 1.52



Hình 1.53



Hình 1.54

Bài 1.40: O nằm trong đoạn IK sao cho $OI = 2OK$

Bài 1.41: a) I là điểm đối xứng của A qua B.

$$b) \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad c) \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad d) \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Bài 1.42: a) Cho $M \equiv I \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Rightarrow k = 4$$

$$b) k = 4, \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} (3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$$

$$c) k = 2, \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$$

Bài 1.43: M trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác

Bài 1.44: a) Vì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \beta + \gamma + \gamma + \alpha \neq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $\alpha + \beta \neq 0 \Rightarrow \exists! D : \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

$$\text{Suy ra } \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha + \beta \overrightarrow{MD} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Do đó tồn tại duy nhất điểm M

b) Giả sử tồn tại điểm N và $\alpha \neq 0$

$$\text{Ta có } \alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB} \text{ (mâu thuẫn với } ABC \text{ là tam giác)}$$

Bài 1.45: O là điểm tùy ý, ta có:

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + \dots + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow k_1\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG} + k_2\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} + \dots + k_n\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k} (k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + k_n\overrightarrow{OA_n})$$

Suy ra G xác định duy nhất

$$\text{Bài 1.46: a) } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$b) \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow M, N, P \text{ thẳng hàng}$$

$$\text{Bài 1.47: a) } \overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$b) \overrightarrow{IG} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 5\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{IG} \text{ suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.}$$

$$\text{Bài 1.48: a) Ta có: } 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

$$5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{35}{48} \overrightarrow{AI} - \frac{1}{16} \overrightarrow{AJ}.$$

Bài 1.49: a) \vec{u} cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow$ có số thực k sao cho

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} + 2x - 1 \vec{b} = k(x\vec{a} + \vec{b})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx = 1 \\ k = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) \vec{u} cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow$ có số thực k dương sao cho

$$\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow 3\vec{a} + x\vec{b} = k \left(1 - x \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = k(1 - x) \\ x = -\frac{2}{3}k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = -3(l) \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

Bài 1.50: Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$

$$= 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Bài 1.51: G là trọng tâm $\Delta RIP \Rightarrow \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}$$

$$= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} \Rightarrow \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$$

Do đó G là trọng tâm ΔJQS

Bài 1.52: Tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{0} = \vec{0} \text{ (đúng)}$$

Bài 1.53: G là trọng tâm $\Delta ANP \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} \Rightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Do đó G là trọng tâm ΔCMQ

Bài 1.54: G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } 2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2011 \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + 2012 \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A} + 2011\overrightarrow{AB} + 2012\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ (1)}$$

$$\text{Tương tự ta có } 4023\overrightarrow{B'B} + 2011\overrightarrow{BC} + 2012\overrightarrow{BA} = \vec{0}; 4023\overrightarrow{C'C} + 2011\overrightarrow{CA} + 2012\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Cộng vế với vế lại ta được

$$4023 \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \text{ Suy ra}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

Do đó G là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Bài 1.55: Vì ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm G suy ra $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Vì G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC' nên

$$3\overrightarrow{AG_1} + 3\overrightarrow{BG_2} + 3\overrightarrow{CG_3}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'}$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$ do đó G là trọng tâm $\Delta G_1G_2G_3$

Bài 1.56: G là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4 \Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = \vec{0}$ (*)

Vì G_1 là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_1}$, tương tự ta có

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_2}, \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GG_3}, \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GG_4}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 3 \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (đúng) đpcm

Bài 1.57: Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của MA_1, MB_1, MC_1 với các cạnh BC, CA,

AB. O là trọng tâm đều ΔABC

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 2 \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$$

$$\text{Mặt khác theo bài tập 6 (dạng 2) thì } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 3\overrightarrow{MO}$ do đó O là trọng tâm tam giác A_1, B_1, C_1

$$\text{Bài 1.58: Ta có } \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} = \frac{OA_2}{OA_1} \overrightarrow{OA_1} + \frac{OB_2}{OB_1} \overrightarrow{OB_1} + \frac{OC_2}{OC_1} \overrightarrow{OC_1}$$

$$= a \frac{\overrightarrow{OA_1}}{OA_1} + b \frac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1} + c \frac{\overrightarrow{OC_1}}{OC_1} = \vec{0} \text{ (Theo định lý con nhím)}$$

Do đó O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$

Bài 1.59: a) Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{2}$ với I là trung điểm của AB

$$\text{b) Gọi K là điểm thoả mãn: } 2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

$$\text{L là điểm thoả mãn: } \overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$$

$$\text{Ta có: } \left| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right| = \left| \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right| \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{MK} \right| = \left| \overrightarrow{ML} \right|$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

Bài 1.60: a) Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với cạnh BC của ΔABC .

b) Gọi J là trung điểm AB, I là trung điểm JC ta có $\vec{IA} + \vec{IB} + 2\vec{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MI}$$

Do đó \vec{v} cùng phương với \vec{BC} M thuộc đường thẳng đi qua I và song song với BC.

Bài 1.61: a) Gọi K là điểm thỏa mãn: $2\vec{KA} + 3\vec{KB} = \vec{0}$

L là điểm thỏa mãn: $3\vec{LB} - 2\vec{LC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có: } |2\vec{MA} + 3\vec{MB}| = |3\vec{MB} + 2\vec{MC}| \Leftrightarrow |\vec{MK}| = |\vec{ML}|$$

\Rightarrow Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

b) Với I là trung điểm của BC. Gọi J là điểm thỏa mãn: $4\vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JC} = \vec{0}$

Ta có:

$$|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$$

$$\Leftrightarrow |6\vec{MJ}| = |2\vec{MA} - 2\vec{MI}| \Leftrightarrow |6\vec{MJ}| = |2\vec{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R = \frac{1}{3}IA$.

Bài 1.62: a) $\vec{OB} + 4\vec{OC} = 2\vec{OD} \Leftrightarrow \vec{OB} = \frac{4}{3}\vec{CI}$ với I là trung điểm BD

$$\text{b) } |\vec{MB} + 4\vec{MC} - 2\vec{MD}| = |3\vec{MA}| \Leftrightarrow |\vec{MO}| = |\vec{MA}|$$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn OA.

Bài 1.63: Gọi P là trọng tâm của ΔABC , Q là trọng tâm của ΔDEF

$$|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| + |\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF}| =$$

$$3|\vec{MP}| + 3|\vec{MQ}| = 3MP + 3MQ \geq 3QP$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là mọi điểm thuộc đoạn PQ

Bài 1.64: Gọi hai điểm M_0, N_0 lần lượt thuộc tia Ox và Oy sao cho $OM_0 = ON_0 = \frac{a}{2}$. Giả

sử $OM = k, 0 \leq k \leq a$ khi đó ta có $\vec{MI} = \frac{a-k}{a}\vec{M_0N_0}$. Do đó tập hợp điểm I là đoạn M_0N_0

Bài 1.65: Đặt $\vec{OA} = x\vec{AC}, \vec{OC} = y\vec{AC}, \vec{OB} = z\vec{BD}, \vec{OD} = t\vec{BD}$

$$\text{Suy ra } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y \vec{AC} + z + t \vec{BD} = \vec{0}$$

Do đó $x = -y; z = -t \Rightarrow OA = OC, OB = OD$ nên tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 1.66: Ta có $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{AA'} + \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{2} + \frac{\vec{CA} + \vec{CB}}{2} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA'} + \vec{CA'} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow AA'$ cũng là trung tuyến của tam giác ABC .

Bài 1.67: Giả sử $\overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C} = m\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'A} = n\overrightarrow{C'B}$

$$\overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$$

$$\text{Tương tự ta có } \overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \frac{m-1}{1-m} \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1-m}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} - n\overrightarrow{CB}}{1-n} = \frac{-n\overrightarrow{AB} + n-1}{1-n} \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k} - 1 - \frac{n}{1-n} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{-k}{1-k} + \frac{1}{1-m} - 1 \right) \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \frac{1}{1-k} - 1 - \frac{n}{1-n} = \frac{-k}{1-k} + \frac{1}{1-m} - 1 = 0 \Rightarrow k = m = n.$$

Mặt khác theo định lí Xêva ta có $kmn = -1$ nên $k = m = n = -1$

Vậy AA' , BB' , CC' là các trung tuyến của tam giác ABC

Bài 1.68: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$

Gọi K là trung điểm DC suy ra $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IK}$ do đó $K \equiv J$ hay J là trung điểm của CD .

Bài 1.69: (hình 1.55) Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA từ phương trình thứ hai ta được:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow M, P, O$ thẳng hàng và O là trung điểm MP

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow N, Q, O$ thẳng hàng và O là trung điểm NQ .

Ta có $\triangle OAD$ cân tại O nên $NQ \perp AD$, $\triangle OBC$ cân tại O nên

$NQ \perp BC$ suy ra $AD \parallel BC$.

Tương tự $AB \parallel DC$ suy ra $ABCD$ là hình bình hành

Mà N, Q là trung điểm của BC, AD nên $AB \parallel NQ \Rightarrow AB \perp BC$

Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 1.70: G là trọng tâm tam giác ABC nên $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Do đó $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$

Suy ra G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$

Bài 1.71: H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Do đó $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ hay H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

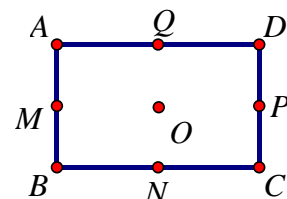
Bài 1.72: Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

Cho ba véc tơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đôi một không cùng phương và thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \\ m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c} = \vec{0} \end{cases} \quad m, m' \neq 0$$

Chứng minh rằng : $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}$. Thật vậy :

Để thấy $m, m' \neq 0$ thì suy ra ngay n, n', p, p' cũng phải khác không.



Hình 1.55

Từ giả thiết ta có :
$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{n}{m}\vec{b} + \frac{p}{m}\vec{c} \\ \vec{a} = \frac{n'}{m'}\vec{b} + \frac{p'}{m'}\vec{c} \end{cases}$$

vì một véc tơ chỉ phân tích được một cách duy nhất qua hai véc tơ không cùng phương nên

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}; \frac{p}{m} = \frac{p'}{m'} \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}$$

Trở lại bài toán

Ta có $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{AD}{MA}\vec{MA} + \frac{BE}{MB}\vec{MB} + \frac{CF}{MC}\vec{MC} = \vec{0}$

Mặt khác $\frac{AD}{MA} = \frac{S_{ABD}}{S_{ABM}} = \frac{S_{ADC}}{S_{ACM}} = \frac{S}{S - S_a}$, tương tự $\frac{BE}{MB} = \frac{S}{S - S_b}$ và $\frac{CF}{MC} = \frac{S}{S - S_c}$

(với $S = S_{ABC}, S_a = S_{MBC}, S_b = S_{MCA}, S_c = S_{MAB}$)

Do đó ta có $\frac{\vec{MA}}{S - S_a} + \frac{\vec{MB}}{S - S_b} + \frac{\vec{MC}}{S - S_c} = \vec{0}$

Mặt khác ta cũng có $S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}$

Áp dụng bổ đề suy ra $\frac{1}{S - S_a} = \frac{1}{S - S_b} = \frac{1}{S - S_c} \Leftrightarrow S_a = S_b = S_c$ hay M trùng trọng tâm

tam giác ABC

Bài 1.73: Do $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ nên tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB} + \gamma\vec{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = \alpha(\vec{MI} + \vec{IA}) + \beta(\vec{MI} + \vec{IB}) + \gamma(\vec{MI} + \vec{IC})$
 $= (\alpha + \beta + \gamma)\vec{MI} + \alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB} + \gamma\vec{IC} = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{MI}$

Do đó $T = |\alpha + \beta + \gamma| \cdot MI$

Suy ra T nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d

Bài 1.74: G là trọng tâm tam giác ABC ta có $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MG}|$

a) M là giao điểm của tia GO với (C)

b) M là giao điểm của tia OG với (C)

Bài 1.75: ĐS: $\min T = 4GG'$

Bài 1.76: Ta có $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$

Suy ra $\vec{AM} = -\vec{BN} - \vec{CP} \Rightarrow |\vec{AM}| = |\vec{BN} + \vec{CP}| \leq |\vec{BN}| + |\vec{CP}|$

Vì \vec{BN} và \vec{CP} không cùng phương nên không thể xảy ra dấu bằng do đó $AM < BN + CP$. Tương tự ta có $BN < AM + CP, CP < AM + BN$

Bài 1.77: $\vec{CM} = \frac{MB}{AB}\vec{CA} + \frac{MA}{AB}\vec{CB} \Rightarrow MC < \frac{MB}{AB}CA + \frac{MA}{AB}CB$

Hay $MC \cdot AB < MA \cdot BC + MB \cdot AC$

Bài 1.78: Ta có: $\vec{AM} = \frac{MD}{CD}\vec{AC} + \frac{MC}{CD}\vec{AD} \Rightarrow AM < \frac{MD}{CD}AC + \frac{MC}{CD}AD$

và $\vec{BM} = \frac{MD}{CD}\vec{BC} + \frac{MC}{CD}\vec{BD} \Rightarrow BM = \frac{MD}{CD}BC + \frac{MC}{CD}BD$

Từ đó suy ra

$$AM + BM < \frac{MD}{CD} AC + BC + \frac{MC}{CD} AD + BD$$

$$\Rightarrow AM + BM < \left(\frac{MD}{CD} + \frac{MC}{CD} \right) \cdot \max AC + BC; AD + BD$$

$$\Rightarrow p < \max AC + BC + AB; AD + BD + AB$$

Hay $p < \max p_1; p_2$

Bài 1.79: Ta chứng minh bằng quy nạp

+ Với $n = 0$: hiển nhiên

+ Giả sử BĐT đúng với $n = k$ ta đi chứng minh đúng với $n = k + 1$ hay $\left| \sum_{i=1}^{2k+3} \overrightarrow{OP_i} \right| \geq 1$

Trong $2k + 3$ vectơ ta chọn hai vectơ có góc lớn nhất, giả sử $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_{2k+3}}$.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{2k+3}}, \overrightarrow{OB} = \sum_{i=2}^{2k+2} \overrightarrow{OP_i}.$$

Suy ra điểm A, B nằm trong góc P_1OP_{2k+3} do đó $AOB \leq 90^\circ$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| \geq |\overrightarrow{OB}|$$

Mặt khác theo giả thiết quy nạp ta có $|\overrightarrow{OB}| = \left| \sum_{i=2}^{2k+2} \overrightarrow{OP_i} \right| \geq 1$

$$\text{Suy ra } \left| \sum_{i=1}^{2k+3} \overrightarrow{OP_i} \right| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| \geq |\overrightarrow{OB}| \geq 1$$