

Đáp án chuyên đề:
Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn – Đại số 10

Bài 3.5: a) Phương trình tương đương với $2m - 4 \quad x = m - 2$

+ Với $2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình trở thành $0x = 0$

Suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi x .

+ Với $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: Phương trình tương đương với $x = -1$

Kết luận

$m = 2$: Phương trình nghiệm đúng với mọi x

$m \neq 2$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$

b) Phương trình tương đương với $3m^2 - m - 2 \quad x = 1 - m$

$$+ \text{ Với } 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

- Khi $m = 1$: Phương trình trở thành $0x = 0$ phương trình nghiệm đúng với mọi x .

- Khi $m = -\frac{2}{3}$: Phương trình trở thành $0x = \frac{5}{3}$ suy ra phương trình vô nghiệm

$$+ \text{ Với } 3m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{2}{3} \end{cases} : \text{PT} \Leftrightarrow x = \frac{1 - m}{3m^2 - m - 2} = \frac{-1}{3m + 2}.$$

Kết luận:

$m = -\frac{2}{3}$: Phương trình vô nghiệm

$m = 1$: Phương trình nghiệm đúng với mọi x

$m = -\frac{2}{3}$ và $m = 1$: Phương trình có nghiệm $x = \frac{-1}{3m + 2}$

Bài 3.6: a) ĐK: $a \neq 0$; $b \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow b \quad x + a - b \quad - a \quad x + b - a = b^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow bx + ab - b^2 - ax - ab + a^2 = b^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow b - a \quad x = 2 \quad b - a \quad b + a$$

-Nếu $b - a \neq 0 \Rightarrow b \neq a$ thì $x = \frac{2 \quad b - a \quad b + a}{b - a} = 2 \quad b + a$

-Nếu $b - a = 0 \Rightarrow b = a$ thì phương trình có vô số nghiệm.

Vậy: -Với $b \neq a$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2(b + a)$.

-Với $b = a$, phương trình có vô số nghiệm

b) ĐKXD: $x \neq \pm 1$

$$\Leftrightarrow ax - 1 \quad x + 1 \quad + 2 \quad x - 1 = a \quad x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + ax - x - 1 + 2x - 2 = ax^2 + a$$

$$\Leftrightarrow a + 1 x = a + 3$$

-Nếu $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$ thì $x = \frac{a + 3}{a + 1}$

-Nếu $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy: -Với $a \neq -1$ và $a \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{a + 3}{a + 1}$

-Với $a = -1$ hoặc $a = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.7: a) Ta có $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x = m^2 - 1$

$$\text{Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình vô nghiệm

b) Ta có PT $\Leftrightarrow m^2 - 1 x = m^3 - 3m + 2$

$$\text{Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m^3 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy với $m = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.8: a) Ta có

$$a bx - a + 2 = a + b - 1 x + 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 x = a^2 - 2a + 1$$

$$\Leftrightarrow a - 1 b - 1 x = a - 1^2$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 b - 1 \neq 0 \\ a - 1 b - 1 = 0 \\ a - 1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy $a \neq 1$ là điều kiện cần tìm.

b) Phương trình tương đương với

$$b 2x - a - ab^2 = a 2x - b - a^2b \Leftrightarrow 2 a - b x = ab a - b$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \neq 0 \\ a - b = 0 \\ ab a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a = b \end{cases} \text{ đúng với mọi } a, b$$

Vậy với mọi a, b khác không thì phương trình có nghiệm.

Bài 3.9: $\Delta = 9m^2 - 4 2m^2 - m - 1 = 9m^2 - 8m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = (m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$

$$\text{Nghiệm kép đó là } x_1 = x_2 = \frac{3m}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Bài 3.10: a) Với $m = -2$ ta có phương trình:

$-2x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$, phương trình này có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

b) Với $m = 0$ ta thấy phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - m \cdot m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Bài 3.11: a) * $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Pt $\Leftrightarrow -6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

* $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: $\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 2)(m - 5) = 9m - 9 = 9(m - 1)$
+ $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9(m - 1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$: Phương trình vô nghiệm.

+ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$: Phương trình có nghiệm kép $x = \frac{m + 1}{m - 2} = -2$.

+ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9(m - 1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m + 1 + 3\sqrt{m - 1}}{m - 2} \\ x = \frac{m + 1 - 3\sqrt{m - 1}}{m - 2} \end{cases}$$

Kết luận:

+ $m < 1$: Phương trình vô nghiệm

+ $m = 1$: phương trình có nghiệm $x = -2$

+ $m = 2$: phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$

+ $1 < m \neq 2$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = \frac{m + 1 + 3\sqrt{m - 1}}{m - 2} \\ x = \frac{m + 1 - 3\sqrt{m - 1}}{m - 2} \end{cases}$

b) * $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó (1) $\Leftrightarrow -3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

* $m \neq 2$, khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta = -4m + 17$.

i) $m > \frac{17}{4} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm

ii) $m = \frac{17}{4} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (1)$ có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = \frac{2m - 1}{2(m - 2)} = \frac{10}{3}.$$

iii) $m < \frac{17}{4} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2m-1 + \sqrt{-4m+17}}{2m-2}; x_2 = \frac{2m-1 - \sqrt{-4m+17}}{2m-2}.$$

Kết luận: * $m = 2$ phương trình có một nghiệm $x = \frac{4}{3}$

* $m > \frac{17}{4}$ phương trình vô nghiệm.

* $m = \frac{17}{4}$ phương trình có nghiệm kép $x = \frac{10}{3}$.

* $\begin{cases} m < \frac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{2m-1 \pm \sqrt{-4m+17}}{2m-2}$.

Bài 3.12: Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và Parabol (P) là nghiệm của :

$$m-1 x^2 + 2mx + 3m-1 = 2x + m \Leftrightarrow m-1 x^2 + 2m-1 x + 2m-1 = 0$$

(*)

- Với $m = 1$ ta thấy (*) vô nghiệm nên d và (P) không có giao điểm
- Với $m \neq 1$ thì (*) là phương trình bậc hai có
- $\Delta' = m-1 - m-1 = -m$

Do đó ta có các trường hợp sau:

TH1: Nếu $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ thì $\Delta' < 0$ nên (*) vô nghiệm nên d và P không có giao điểm

TH2: Nếu $m = 0$ thì $\Delta' = 0$ và (*) có một nghiệm $x = -1$

TH3: Nếu $m \in (0; 1)$ thì $\Delta' > 0$ và (*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{m-1-m}}{m-1}$$

Bài 3.13: a) Phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

Suy ra $f(x) = 2x - 3$ $x - 1$

b) $g(x) = 2x^2 + 2x - 9 = 2x^2 + 2x - 3$ $x + 3$

c) $P(x; y) = x - 2y$ $3x + y$

d) $Q(x; y) = x - 2y - 1$ $x + y + 1$

Bài 3.14: $f(x) = (x^2 + m)(2x + m + 1)$

Bài 3.15: Ta có $\Delta = 3^2 + 4 = 13 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -1$.

Khi đó: $A = 11, B = 83, C = 3\sqrt{13}$.

Bài 3.16: Trước hết phương trình phải có hai nghiệm khác 0 nên:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 4m + 1 > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4m + 1}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 1 > 0 \\ m^2 - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{4(1-m)}{3}; x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3}$

Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2} x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 2 = 0$ (Do $x_1 x_2 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m^2 - 4m - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1, m = -1, m = 5.$$

Thay vào (*) ta thấy $m = -1$ không thỏa mãn

Vậy $m = 1, m = 5$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.17: Ta có phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow m - 1^2 - m^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2 \quad (*)$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

$$a) x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 \Leftrightarrow 2m - 2 = 2(m^2 - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

$$b) A = 2(x_1 + x_2)^2 - 5x_1 x_2 = 2(2m - 2)^2 - 5(m^2 - 3)$$

$$= -5m^2 + 4m + 11 = -5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + 3 \leq 3$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$$

$$c) B = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2^2 - 3x_1 x_2} = \frac{m^2 - 3}{2m - 2^2 - 3(m^2 - 3)} = \frac{m^2 - 3}{m^2 - 8m + 13}$$

Suy ra $\min B = -\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $m = 1$

Bài 3.18: • Giả sử hai phương trình đã cho có nghiệm chung x_0 , thế thì ta phải có:

$$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 - 4m + 1 = 0 \\ x_0^2 + 3m + 1 - x_0 + 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 + 4} \\ m = \frac{-x_0^2 - x_0 - 1}{3x_0 + 2} \end{cases} \text{ với } \begin{cases} x_0 \neq -2 \\ x_0 \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\frac{x_0^2 + 1}{2x_0 + 4} = \frac{-x_0^2 - x_0 - 1}{3x_0 + 2}$

$$\Leftrightarrow x_0 + 1 - 5x_0^2 + 3x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow m = 1$$

• Với $m = 1$ ta thấy (1) và (2) có nghiệm chung là $x = -1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.19: Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Ta có: $\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \\ x_0^2 + mx_0 + n = 0 \end{cases} \Rightarrow (a - m)x_0 = n - b$ (*)

+) Nếu $a - m = 0 \Leftrightarrow a = m$, từ (*) $\Rightarrow n - b = 0 \Leftrightarrow b = n \Rightarrow$ đúng.

+) Nếu $m \neq a$, từ (*) $\Rightarrow x_0 = \frac{n - b}{a - m}$ thay vào một trong hai phương trình ban đầu ta

được:

$$\left(\frac{n - b}{a - m}\right)^2 + a\left(\frac{n - b}{a - m}\right) + b = 0 \Leftrightarrow n - b^2 = m - a \quad an - bm$$

Bài 3.20: • Nếu trong ba số a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $a = 0 \Rightarrow$ (2) có nghiệm $x = 0$.

• $abc \neq 0$, khi đó ba phương trình đã cho là ba phương trình bậc hai lần lượt có biệt thức: $\Delta'_1 = b^2 - ac$; $\Delta'_2 = c^2 - ab$; $\Delta'_3 = a^2 - bc$.

Ta có: $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2} \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] \geq 0.$$

Suy ra trong ba số Δ'_1 ; Δ'_2 ; Δ'_3 có ít nhất một số không âm hay ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.21: a) Ta có: $b^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \geq 4$.

b) Do phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 \geq 1$ nên $b^2 \geq 4c$, và

$$b \leq -2 \text{ suy ra } P \geq \frac{2b^2 + b + 2}{b^2 + 1}. \text{ Ta có}$$

$$P - \frac{8}{5} = \frac{5(2b^2 + b + 2) - 8(b^2 + 1)}{b^2 + 1} = \frac{2b^2 + 5b + 2}{b^2 + 1} = \frac{b + 2}{b^2 + 1} \geq 0 \text{ với mọi}$$

$$b \leq -2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = -2, c = 1$.

Vậy $P_{\min} = \frac{8}{5}$ khi $b = -2, c = 1$.

Bài 3.22: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - 3\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{18 + 9x_1 + x_2 + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}.$$

• Ta tìm Max của Q.

Ta đánh giá $(x_1 + x_2)^2$ qua $x_1 x_2$ với điều kiện $x_1, x_2 \in [0; 3]$.

$$\text{Giả sử } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \leq x_1 x_2 \\ x_2^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \leq 9 + 3x_1 x_2$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{18 + 9x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 + 9}{9 + 3x_1 + x_2 + x_1 x_2} = 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{cases} \text{ Hay là: } \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}.$$

• Ta tìm Min của Q

$$\text{Ta có: } Q - 2 = \frac{3x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3x_1 + x_2 + x_1 x_2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0.$$

Vậy $\max Q = 3$ và $\min Q = 2$.

Bài 3.23: Từ giả thiết của bài toán suy ra: $a \geq 1, 0 < c \leq \frac{1}{4a}$.

Suy ra

$$P \geq \frac{4a^3 - 1}{a^2 - 4a^4} \Rightarrow P + 1 \geq \frac{4a^3 - 1}{a^2 - 4a^4} + 1 = \frac{4a^4 - 4a^3 - a^2 + 1}{a^2 - 4a^4} = \frac{a - 1}{a^2} \frac{4a^3 - a - 1}{1 - 4a^2}$$

Vì $a \geq 1$ nên $4a^3 - a - 1 = a(a^2 - 1) + 3a^2 - 1 > 0$ do đó

$$\frac{a - 1}{a^2} \frac{4a^3 - a - 1}{1 - 4a^2} \geq 0 \Rightarrow P \geq -1. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi: } a = 1, c = \frac{1}{4}.$$