Đáp án chuyên đề:
Một số ứng dụng của tích vô hướng - Hình học 10

Bài 2.96: $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow AB\perp CD$

Bài 2.97 : Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x},\ \overrightarrow{AD}=\vec{y}$. Khi đó :

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\left(3\vec{x}-\vec{y}\right),\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\left(\vec{x}+3\vec{y}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=\frac{1}{16}\left(3\vec{x}-\vec{y}\right)\left(\vec{x}+3\vec{y}\right)=\frac{1}{16}\left(3\vec{x}^2-3\vec{y}^2+8\vec{x}.\vec{y}\right)=0$

Mặt khác $\overrightarrow{MB}^2=\frac{1}{16}\left(3\vec{x}-\vec{y}\right)^2=\frac{5}{8}\vec{y}^2,\ \overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{16}\left(\vec{x}+3\vec{y}\right)^2=\frac{5}{8}\vec{y}^2$

Vậy tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M.

Bài 2.98: Đặt $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CE}{EA}=k$; $\overrightarrow{AB}=\vec{i};\overrightarrow{AC}=\vec{j}$.

Ta có: $AM=kMB\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{k}{k+1}\vec{i}$; $BN=kNC\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{\vec{i}-k\vec{j}}{1-k}$

$AE=\frac{1}{k}EC\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{1}{k+1}\vec{j}$. Do đó $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{k+1}\left(\vec{j}-k\vec{i}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{ME}=\frac{1}{1-k^2}\cdot\left(\vec{j}-k\vec{i}\right)\left(\vec{i}-k\vec{j}\right)=0\Rightarrow AN\perp ME$ đpcm.

Bài 2.99: $AM\perp PN\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}\right)=0\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2-\frac{x}{a}\right)\frac{1}{2}+9a^2-18ax=0\Leftrightarrow x=\frac{4a}{5}$

Bài 2.100: Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BK}=\vec{c}.$ và $BA=a,\ BC=b,BK=c$.

Ta có: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

Do đó $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\frac{\vec{c}}{2}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\left(2\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c}-c^2\right)$

$$=\frac{1}{4}\left[2\vec{a}.\vec{b}+\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\vec{c}+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\vec{c}\right]$$

Vì $\vec{a}.\vec{b} = 0$ và $\vec{b} - \vec{a}\ \ \vec{c} = 0$; $\vec{b} - \vec{c}\ \ \vec{c} = 0$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BM} = 0$

Suy ra: $BMN = 90^0$

Bài 2.101: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ suy ra $2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = \ \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}\ \ \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\ = -\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AD}^2 = 0$

Vậy $AI \perp BD$

Bài 2.102: Để ý rằng $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng hình chiếu trên AC, $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{AC}$ có cùng hình chiếu trên BD và $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{HK}.2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}\ \ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\ = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Bài 2.103: Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = \ \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}\ \ \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \ \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}\ .\overrightarrow{BH}$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HD}\ \ \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}\ = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC} = 0$

Vậy AM vuông góc với DB

Bài 2.104: Gọi H là giao điểm của AI với B'C'. Xét tích vô hướng của hai vectơ

$\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PI}\ \ \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}\ = \ \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HI}\ \ \overrightarrow{AI} + \ \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'I}\ \ \overrightarrow{IA'}$

$= \overrightarrow{PH}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{PA'}.\overrightarrow{IA'} - IA'^2$

$= \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AI} - IA'^2 = IB'^2 - IA'^2 = 0$

Bài 2.105: Ta có $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

Suy ra $BE \perp AF \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AF} = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \dfrac{2}{5}$

Bài 2.106: Ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{a+b+c}\ a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$

Mặt khác $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{a+b+c}\ a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}\ - \dfrac{1}{3}\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

hay $\overrightarrow{GI} = \left(\dfrac{a}{a+b+c} - \dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\dfrac{b}{a+b+c} - \dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{CB}$

Suy ra IG vuông góc với IC khi và chỉ khi $\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IC} = 0$

$\Leftrightarrow\ ab + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}\ \left[(b\ \ 2a - b - c\ + a\ \ 2b - a - c\ \right] = 0$

Do $ab + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = ab(1+cosC) > 0$ nên dễ có

$b(2a-b-c) + a(2b-a-c) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$

Bài 2.107 C1: $\Rightarrow 2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})$

$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Suy ra $MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

C2: Gọi H là giao điểm của MP và BC.

Ta có $MP \perp BC \Leftrightarrow MCH + CMH = 90^{\circ}$

$\Leftrightarrow MCH + PMA = 90^{\circ} \Leftrightarrow MCH = MDA$

$\Leftrightarrow$ tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Bài 2.108: Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{HQ} - \overrightarrow{HP}, 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Do đó $2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{HQ} - \overrightarrow{HP})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HQ}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HP}.\overrightarrow{AC}$

Mặt khác, ta có $(\overrightarrow{HQ}, \overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{HQ}, \overrightarrow{AB}) = -\cos(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{AC})$

Suy ra $AM \perp PQ \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow HQ.AB = HP.AC \Leftrightarrow \frac{HP}{AB} = \frac{HQ}{AC}$.

Lại có $APHQ$ là hình bình hành nên $HP = AQ,\ HQ = AP$.

Suy ra $\frac{HP}{AB} = \frac{HQ}{AC} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC}$. Mà điều này hiển nhiên đúng vì ta có $\triangle PAC \sim \triangle QAB$ (g.g).

Vậy ta có đpcm.

Bài 2.109: Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có: $(x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} + z\overrightarrow{IC})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)R^2 + 2(xy\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + yz\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + xz\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)R^2 + 2(xy\cos 2C + yz\cos 2A + zx\cos 2B)R^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow xy\cos 2C + yz\cos 2A + zx\cos 2B \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

Nhận xét:

- Khi chọn: $x = y = z = 1$, ta có: $\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B \geq -\frac{3}{2}$
- Khi chọn: $x = z = 1, y = -1$, ta có: $\cos 2C - \cos 2A + \cos 2B \leq \frac{3}{2}$

Bài 2.110: Gọi H là trực tâm của tam giác. Với mọi điểm M thuộc đường tròn (O) ta có:

$T = MA^2 + MB^2 + MC^2$

$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \ = 6R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$= 6R^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OH}$

$= 6R^2 + 2R.OH.\cos\alpha(\alpha = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OH}))$

Từ đó suy ra

- T nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OH}$
- T lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}$ cùng hướng $\overrightarrow{OH}$

Bài 2.111: Ta có $\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}}{BD.CK}\right| = \frac{\left|(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right|}{4.BD.CK}$

$= \frac{\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BC}^2\right|}{4.BD.CK} = \frac{BC^2}{2.BD.CK}(do BA \perp CA)$

Mặt khác $2.BD.CK \le BD^2 + CK^2$

Mà $BD^2 + CK^2 = \frac{1}{4}(2.AB^2 + 2.BC^2 - AC^2) + \frac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2)$

$= \frac{5BC^2}{4}$ (do $BC^2 = AB^2 + AC^2$)

Do đó $\cos\alpha \ge \frac{BC^2}{\frac{5BC^2}{4}} = \frac{4}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BD = CK$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A

Vậy $\min\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Bài 2.112: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có :

$T = \frac{MA.GA}{a.GA} + \frac{MB.GB}{b.GB} + \frac{MC.GC}{c.GC} = \frac{3}{2}.(\frac{MA.GA}{a.m_a} + \frac{MB.GB}{b.m_b} + \frac{MC.GC}{c.m_c})$

Theo BĐT Cauchy ta có

$am_a = \frac{1}{2}a.\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(3a^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)}$

$\le \frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{3a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.(a^2 + b^2 + c^2)$

Do đó $am_a \le \frac{1}{2\sqrt{3}}.(a^2 + b^2 + c^2)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$

Chứng minh tương tự:

$bm_b \le \frac{1}{2\sqrt{3}}.(a^2 + b^2 + c^2)$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 + c^2 = 2b^2$

$cm_c \le \frac{1}{2\sqrt{3}}.(a^2 + b^2 + c^2)$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 + b^2 = 2c^2$

Vậy $T \ge \frac{3\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}(MA.GA + MB.GB + MC.GC)$

Mặt khác $MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy $\min T = \sqrt{3}$ khi và chỉ khi ΔABC đều và $M \equiv G$

Bài 2.113: Ta có $T = 2.\cos\frac{A}{2}.MA + \frac{MB.AB}{AB} + \frac{MC.AC}{AC}$

$\ge 2.\cos\frac{A}{2}.MA + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AC}}{AC}$

Do đó ta có: $2.\cos\frac{A}{2}.MA + MB + MC \ge 2\cos\frac{A}{2}.MA + \overrightarrow{MA}(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}) + AB + AC(1)$

Lấy E, F trên AB, AC sao cho $AE = AF = 1$.

Dựng hình thoi $AESF$ ta có $AS = 2\cos\frac{A}{2}$. Suy ra $\left|\vec{u}\right| = 2\cos\frac{A}{2}$ với $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$. Do đó : $2\cos\frac{A}{2}.MA + \overrightarrow{MA}(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}) = 2.MA.\cos\frac{A}{2}\left[1 + \cos(\overrightarrow{MA}, \vec{u})\right] \ge 0(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $2.\cos\frac{A}{2}.MA + MB + MC \ge AB + AC$

Vậy $\min T = AB + AC$ khi và chỉ khi M trùng A

Bài 2.114: Ta có $x.\overrightarrow{GA} + y.\overrightarrow{GB} + z.\overrightarrow{GC}\ ^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow\ x + y + z \quad x.GA^2 + y.GB^2 + z.GC^2 \ \ge a^2yz + b^2zx + c^2xy$

$\Leftrightarrow\ x + y + z \quad x.m_a^2 + y.m_b^2 + z.m_c^2 \ \ge \frac{9}{4}\ a^2yz + b^2zx + c^2xy$

a) Cho $x = a,\ y = b,\ z = c$ ta được $am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \ge \frac{9}{4}abc$

b) Cho $x = \frac{a}{m_a},\ y = \frac{b}{m_b},\ z = \frac{c}{m_c}$ ta được $am_bm_c + bm_cm_a + cm_am_b \ge \frac{9}{4}abc$

c) Cho $x = bc,\ y = ca,\ z = ab$ ta được $\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \ge \frac{9}{4}.\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}$

Bài 2.115: $x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} + z.\overrightarrow{OC}\ ^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow\ x + y + z \quad x.OA^2 + y.OB^2 + z.OC^2 \ \ge a^2yz + b^2zx + c^2xy$

$\Leftrightarrow R^2\ \ x + y + z\ ^2 \ge a^2yz + b^2zx + c^2xy$

a) Cho $x = y = z$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$

b) Cho $x = a,\ y = b,\ z = c$ suy ra $R \ge 2r$

c) Cho $x = y = -z$ suy ra $R^2 + a^2 + b^2 \ge c^2$

d) Cho $x = bc,\ y = ca,\ z = ab$ suy ra $4S \le\ \ ab + bc + ca\ \sqrt{\frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3}}$

e) Cho $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$ suy ra $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\le 8R\left(R-2r\right)$

Bài 2.116: Ta có $c.MA'=AB.MA'\ge \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA'}$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế ta được

$cMA'+aMB'+bMC'\ge \overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+cOA'+aOB'+bOC'$

Suy ra $cMA'+aMB'+bMC'\ge cOA'+aOB'+bOC'$

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được bài toán tổng quát: Cho O là điểm bất kỳ nằm đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n\ge 3$). Qua O kẻ các đường thẳng song song với $A_iA_{i+1}, i=\overline{1,n}$ (xem $A_{i+1}=A_1$) tương ứng cắt các cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$ tại B_i. Chứng minh rằng :

$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}\left(MB_i-OB_i\right)\ge 0$

Bài 2.117: Gọi I là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AIC}=90^0,\ \widehat{BIA}=150^0,\ \widehat{CIB}=120^0$.

Khi đó ta có $\dfrac{\overrightarrow{IA}}{IA}+2\dfrac{\overrightarrow{IB}}{IB}+\sqrt{3}\dfrac{\overrightarrow{IC}}{IC}=\vec{0}$

Vì thế $MA+2MB+\sqrt{3}MC\ge \overrightarrow{MA}.\dfrac{\overrightarrow{IA}}{IA}+2.\overrightarrow{MB}.\dfrac{\overrightarrow{IB}}{IB}+\sqrt{3}.\overrightarrow{MC}.\dfrac{\overrightarrow{IC}}{IC}=IA+2IB+\sqrt{3}IC$

Dấu bằng có khi $M\equiv I$

Bài 2.118: Theo *định lí con nhím* ta có $A_1A_2\vec{e_1}+A_2A_3\vec{e_2}+...+A_nA_1\vec{e_n}=\vec{0}$ với $\vec{e_i},\ i=\overline{1,n}$ là các vectơ đơn vị hướng ra ngoài đa giác và tương ứng vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{i+1}\equiv A_1$).

Ta có $A_1A_2.MB_1=\dfrac{A_1A_2}{OB_1}.MB_1.OB_1\ge \dfrac{A_1A_2}{OB_1}.\overrightarrow{MB_1}.\overrightarrow{OB_1}$

Mặt khác $\dfrac{A_1A_2}{OB_1}.\overrightarrow{MB_1}.\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{A_1A_2}{OB_1}.\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB_1}\right).\overrightarrow{OB_1}=A_1A_2\overrightarrow{MO}+A_1A_2.OB_1$

$\Rightarrow A_1A_2.MB_1\ge A_1A_2\overrightarrow{MO}+A_1A_2.OB_1$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế ta được

$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.MB_i\ge \overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.\vec{e_i}+\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.OB_i=\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.OB_i$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}\left(MB_i-OB_i\right)\ge 0$

Bài 2.119: Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ có tâm là O khi đó $\vec{e_1}+\vec{e_2}+...+\vec{e_n}=\vec{0}$ với $\vec{e_i}, i=1,2,...$ là các vectơ đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{OA_i}, i=1,2...$.

$MA_1=\dfrac{1}{OA_1}.MA_1.OA_1\ge \dfrac{1}{OA_1}.\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1}{OA_1}.\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_1}\right).\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{MO}.\vec{e_1}+OA_1$ Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế ta được

$MA_1+MA_2+...+MA_n\ge \overrightarrow{MO}\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}+...+\vec{e_n}\right)+OA_1+OA_2+...+OA_n$

Suy ra $MA_1+MA_2+...+MA_n\ge OA_1+OA_2+...+OA_n$

Bài 2.120: Ta có $S_{MBC}\,\overrightarrow{MA}+S_{MCA}.\overrightarrow{MB}+S_{MAB}\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (Xem bài 1.21)

Suy ra $\sin\alpha.\overrightarrow{e_1}+\sin\beta.\overrightarrow{e_2}+\sin\gamma\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$ (*) với $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ là các vectơ đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$.

Ta có $MA\sin\alpha \ge \dfrac{\sin\alpha}{OA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}=\dfrac{\sin\alpha}{OA}.\ \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\ .\overrightarrow{OA}=\sin\alpha.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{e_1}+\sin\alpha.OA$ Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế và kết hợp (*) ta được

$MA\sin\alpha+MB\sin\beta+MC\sin\gamma \ge OA\sin\alpha+OB\sin\beta+OC\sin\gamma$

Nhận xét:

- Cho $M\equiv G, N\equiv I$ ta có

$GA\sin BIC+GB\sin CIA+GC\sin AIB \ge IA\sin BIC+IB\sin CIA+IC\sin AIB$

Mặt khác $\sin BIC=\sin\left(\pi-\dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{A}{2}\right)=\cos\dfrac{A}{2}$

Tương tự $\sin CIA=\cos\dfrac{B}{2}$, $\sin AIB=\cos\dfrac{C}{2}$

Và $\cos\dfrac{A}{2}.IA+\cos\dfrac{B}{2}.IB+\cos\dfrac{C}{2}.IC=AE+BF+CD=\dfrac{a+b+c}{2}$;

$GA=\dfrac{2}{3}m_a,\ GB=\dfrac{2}{3}m_b,\ GC=\dfrac{2}{3}m_c$. Ta được bài toán

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$m_a\cos\dfrac{A}{2}+m_b\cos\dfrac{B}{2}+m_c\cos\dfrac{C}{2}\ge\dfrac{3}{4}\ \ a+b+c$

- Cho $M\equiv O, N\equiv I$ ta được

$OA\cos\dfrac{A}{2}+OB\cos\dfrac{B}{2}+OC\cos\dfrac{C}{2}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$, kết hợp định lý sin ta có

$\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\ge\sin A+\sin B+\sin C$

- Cho $M\equiv H, N\equiv I$ và kết hợp với $\tan A.HA=a,\ \tan B.HB=b,\ \tan C.HC=c$ khi tam giác ABC nhọn.

Ta được $\dfrac{a\cos\frac{A}{2}}{\tan A}+\dfrac{a\cos\frac{B}{2}}{\tan B}+\dfrac{a\cos\frac{C}{2}}{\tan C}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$

Bài 2.121: Gọi I, O lần lượt là là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác khi đó ta có

$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Suy ra $\ a+b+c\ \ \overrightarrow{MI}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow\ \ a+b+c\ ^2\ MI^2=a^2MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2+$

$+2ab\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2bc\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+2ca\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow\ \ a+b+c\ \ MI^2=a.MA^2+b.MB^2+c.MC^2-abc$

a) $P\ge abc$ dấu bằng xảy ra khi $M\equiv I$

Ta có $MI^2=MO^2+OI^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI}=R^2+OI^2-2R.OI.\cos MOI$

b) P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI^2 đạt lớn nhất $\Leftrightarrow \cos MOI = -1 \Leftrightarrow MOI = 180^0$
Hay M là giao điểm của tia IO với đường tròn (O)

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI^2 đạt nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos MOI = 1 \Leftrightarrow MOI = 0^0$
Hay M là giao điểm của tia OI với đường tròn (O)
c) P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I lên d

Bài 2.122: $\alpha_i OA_i.MA_i \geq \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{MA_i}, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{MA_i}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT **Cauchy** ta có :

$$\alpha_i.MA_i^2 + \alpha_i OA_i^2 \geq 2\alpha_i MA_i.OA_i \;, \forall i = \overline{1,n}, \alpha_i > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 \geq 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i MA_i \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra điều phải chứng minh.
Bài 2.123: a) Ta có

$$-\overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) \leq \left|-\overrightarrow{MA}\right|\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right| = MA.\sqrt{\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)^2} = \sqrt{2}.MA$$

$\Rightarrow \sqrt{2}MA + MB + MC \geq -\overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) + \overrightarrow{MB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \overrightarrow{MC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = AB + AC$ Suy ra $M \equiv A$

b) Gọi I là trung điểm của đường cao AH. Ta có $a^2\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
(Theo bài 1.24)
Kết hợp bài 14 ta thu được bất đẳng thức
$a^2.IA\left(MA - IA\right) + b^2.IB\left(MB - IB\right) + c^2.IC\left(MC - IC\right) \geq 0$ với mọi điểm M. Áp dụng định lí sin suy ra

$\left(MA - IA\right).IA\sin^2 A. + \left(MB - IB\right).IB\sin^2 B + \left(MC - IC\right).IC\sin^2 C \geq 0$ với mọi điểm M

Giả sử tam giác ABC cân cạnh x thì $IA = \dfrac{\sqrt{2}x}{4}$, $IB = \dfrac{\sqrt{10}x}{4}$

Suy ra $2\sqrt{2}MA + \sqrt{10}\left(MB + MC\right) \geq 6x^2$
Vậy I là điểm cần tìm.

Bài 2.124: *Gọi A', B', C', lần lượt là trung điểm BC, CA, AB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác,vì tam giác nhọn nên O nằm trong tam giác ABC ta có:*

$$\left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 \geq 2OB'.OC'.\cos A + 2OC'.OA'.\cos B + 2OA'.OB'\cos C$$

Mặt khác $OA' = OB.\cos BOA' = OB.\cos A = R\cos A$
Tương tự ta có: $OB' = R\cos B$, $OC' = R\cos C$

Suy ra $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge 6\cos A.\cos B.\cos C$
Dấu " = " xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài 2.125: a) Ta có $3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \ge a^2 + b^2 + c^2$ cho M trùng với tâm ngoại tiếp tam giác ta được $9R^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$.

Áp dụng định lí sin ta có $9R^2 \ge 4R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin^2 C$

Hay $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

b) Áp dụng các bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2$ và câu a

c) Áp dụng các bất đẳng thức $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ và câu a

d) Ta có nếu A, B, C là 3 góc của tam giác thì $90^0 - \frac{A}{2}$;$90^0 - \frac{A}{2}$; $90^0 - \frac{A}{2}$ cũng là ba góc của tam giác do đó theo câu a thì ta suy ra được $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$

Bài 2.126: Ta có $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\right).\left(\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{S'B'}\right) = 0$

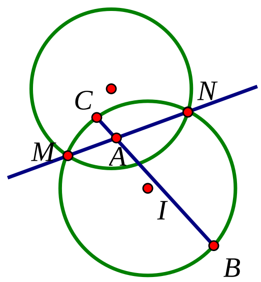
Bài 2.127: Vì AA' tiếp xúc với (O'), BB' tiếp xúc với (O) nên $\begin{cases} AN.AB' = AA'^2 \\ B'M.B'A = B'B^2 \end{cases}$. Mặt khác $AA' = BB'$ nên $AN.AB' = B'M.B'A \Rightarrow AN = B'M \Rightarrow AM = B'N$

Bài 2.128: Cho tam giác ABC không cân tại A; AM, AD lần lượt là trung tuyến, phân giác của tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$

HD: Ta có $\begin{cases} BE.BA = BM.BD \\ CF.CA = CM.CD \end{cases} \Rightarrow \frac{BE}{CF}.\frac{BA}{CA} = \frac{BM}{CM}.\frac{BD}{CD}$

Mặt khác $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD}; \frac{BM}{CM} = 1 \Rightarrow \frac{BE}{CF} = 1 \Rightarrow BE = CF$

Bài 2.129: (hình 2.25) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNB.



Hình 2.25

Gọi C là giao điểm của AB và (I). Khi đó ta có:

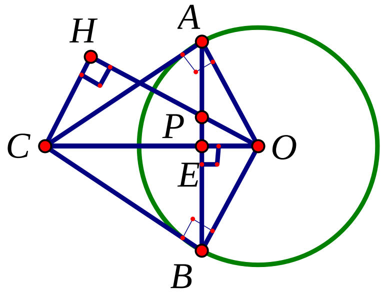
$P_{A/(I)} = \overline{AC}.\overline{AB} = \overline{AM}.\overline{AN} = P_{A/(O)}$

(không đổi vì A, (O) cố định). Suy ra $\overline{AC} = \frac{P_{A/(O)}}{\overline{AB}}$

Vì A, B cố định và C thuộc AB nên từ hệ thức trên ta có C cố định.

Suy ra I thuộc đường trung trực của BC cố định

Bài 2.130: (hình 2.26) Kẻ $CH \perp OP$.



Hình 2.26

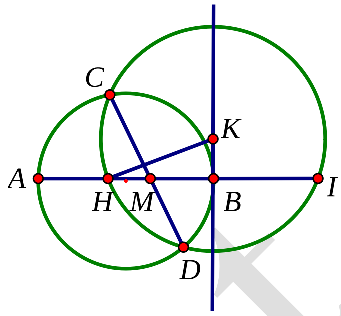
Ta có tứ giác $CEPH$ nội tiếp nên $OP.OH = OE.OC$

Vì tam giác OBC vuông tại B và BE là đường cao nên $OE.OC = OB^2 = R^2$

Suy ra $OP.OH = R^2 \Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{OP}$

Vì O, P cố định nên H cố định

Vậy tập hợp điểm C là đường thẳng vuông góc với OP tại H.



Hình 2.27

Bài 2.131: (hình 2.27)Gọi I là điểm đối xứng của H qua B, suy ra I cố định và thuộc (K). Gọi M là giao điểm của CD và AB.

Ta có $\overline{MH}.\overline{MI} = \overline{MC}.\overline{MD}$ và

$\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MA}.\overline{MB}$ suy ra $\overline{MH}.\overline{MI} = \overline{MA}.\overline{MB}$

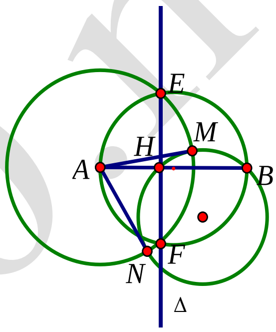
$\Rightarrow \ \overline{MB} + \overline{BH} \quad \overline{MB} + \overline{BI} \ = \overline{MB} \ \ \overline{MB} + \overline{BA}$

$\Leftrightarrow \ \overline{MB} + \overline{BH} \quad \overline{MB} - \overline{BH} \ = \overline{MB}^2 + \overline{MB}.\overline{BA}$

$\Leftrightarrow \overline{MB}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MB}.\overline{BA}$

$\Leftrightarrow \overline{BM} = \dfrac{BH^2}{\overline{BA}}$

Vì A, B, H cố định suy ra M cố định. đpcm.



Hình 2.28

Bài 2.132: (hình 2.28)Ta có $AM = AN = AE$.

Trong tam giác AEB,

$EH \perp AB \Rightarrow AE^2 = AH.AB = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

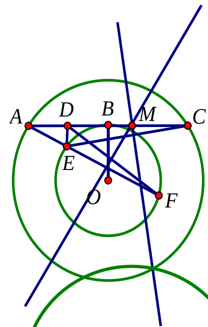
Suy ra $AM^2 = AN^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

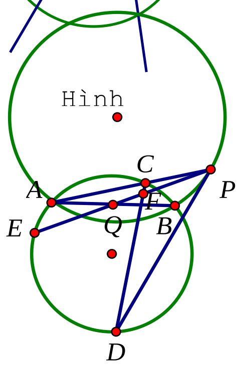
Vậy AM và AN là hai tiếp tuyến của (C).

Bài 2.133: (hình 67)B là trung điểm AC. Ta có

$P_{A/\ C_2} = \overline{AE}.\overline{AF} = AB^2 = \dfrac{1}{2}\overline{AB}.2.\overline{AB} = \overline{AD}.\overline{AC}$ Do đó tứ giác $DCFE$ nội tiếp .

Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DCFE$ mà M nằm trên AC nên $MD = MC = \dfrac{1}{2}DC$. Từ đó ta tính được $AM = \dfrac{5}{4}AB$ và $MC = \dfrac{3}{4}AB \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{5}{3}$





Hình 2.29

Bài 2.134: (hình 2.29) Gọi E là giao điểm thứ hai của PQ với đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. CD cắt PQ tại F.Ta có

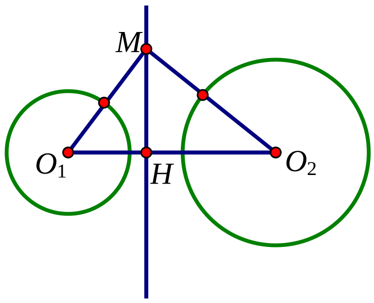
$OQ^2 - R^2 = \overline{QA}.\overline{QB} = \overline{QP}.\overline{QE}$. Mà P, Q cố định nên $\overline{PQ}$ không đổi $\Rightarrow \overline{QE}$ không đổi do đó E cố định. Mặt khác $PDC = PBA = PEA$ nên tứ giác $DAEF$ nội tiếp suy ra $PO^2 - R^2 = \overline{PD}.\overline{PA} = \overline{PE}.\overline{PF}$

Mà P, E cố định nên $\overline{PE}$ không đổi$\Rightarrow \overline{PF}$ không đổi do đó F cố định.

Vậy CD luôn đi qua điểm cố định là F.

Bài 2.135.(hình 2.30) Giả sử điểm M có phương tích đến hai đường tròn bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của M trên O_1O_2, I là trung điểm của O_1O_2. Ta có:

$$P_{M/O_1} = P_{M/O_2} \Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \; MH^2 + HO_1^2 \; - \; MH^2 + HO_2^2 \; = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow HO_1^2 - HO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \; \overline{HO_1} - \overline{HO_2} \;\; \overline{HO_1} + \overline{HO_2} \; = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{O_2O_1}.2\overline{HI} = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{\overline{O_1O_2}} \qquad 1$$



Hình 2.30

Từ đây suy ra H cố định, suy ra M thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với O_1O_2.

Nhận xét: Đường thẳng này được gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Chú ý các hệ quả sau có nhiều ứng dụng:

Cho hai đường tròn (O) và (I). Từ bài toán ta suy ra được các tính chất sau:

a) Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường thẳng nối tâm.

b) Nếu hai đường tròn cắt nhau tại A và B thì AB chính là trục đẳng phương của chúng.

c) Nếu điểm M có cùng phương tích đối với (O) và (I) thì đường thẳng qua M vuông góc với OI là trục đẳng phương của hai đường tròn.

d) Nếu hai điểm M, N có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì đường thẳng MN chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

e) Nếu 3 điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì 3 điểm đó thẳng hàng.

f) Nếu (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A thì đường thẳng qua A và vuông góc với OI chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.