Đáp án chuyên đề:
Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn – Đại số 10

Bài 3.45: a) Vô nghiệm b) $(x;y)=(1;-2)$ c) $(x;y)=\left(-\frac{136}{73};-\frac{1905}{73}\right)$

Bài 3.46: a)

$$\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ x-3y+z=5 \\ x-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5y \\ 1+5y+2y-3z=2 \\ 1+5y-3y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5y \\ 7y-3z=1 \\ 2y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

b) $(x;y;z)=(1;-1;1)$ c) $(x;y;z)=(0;-4;10)$ d) $(x;y;z)=\left(\frac{11}{14};\frac{5}{2};-\frac{1}{7}\right)$

Bài 3.47: a) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+15y=21 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y=17 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$

b) ĐKXĐ: $x \neq \pm y$, đặt $\frac{1}{x+y}=u;\quad \frac{1}{x-y}=v$

Khi đó, có hệ mới $\begin{cases} u+v=\frac{5}{8} \\ -u+v=\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v=1 \\ u+v=\frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{1}{2} \\ u=\frac{1}{8} \end{cases}$

Thay trở lại, ta được: $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

c) $(-3;-2)$, $(-2;-3)$, $(2;3)$, $(3;2)$ d) $(-1;-1)$, $(1;1)$

Bài 3.48: a) Từ hệ phương trình ta có: $D=\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=m.1-1.2=m-2$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2m.1-3.2=2m-6$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=m.3-1.2m=3m-2m=m$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Suy ra hệ phương trình có một nghiệm duy nhất: $x=\frac{D_x}{D}=\frac{2m-6}{m-2};y=\frac{D_y}{D}=\frac{m}{m-2}$

- Nếu $D=0 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow D_x=-4 \neq 0 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

b) Ta có $D=\begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix}=2m^2-m-1=(m-1)(2m+1)$

$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ m^2+2m & -1 \end{vmatrix} = 2m^2+3m+1 = (m+1)(2m+1)$

$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2+2m \end{vmatrix} = (m+1)(m^2+2m) - m^2(m-1) = 2m(2m+1)$

- Với $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

  $(x;y) = \left(\dfrac{D_x}{D};\dfrac{D_y}{D}\right) = \left(\dfrac{m+1}{m-1};\dfrac{2m}{m-1}\right)$

- Với $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$:

\+ Khi $m=-\dfrac{1}{2}$ ta có $\text{D} = D_x = D_y = 0$ nên hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2}x - 2y = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4y-1$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (4t-1;t)$, $t \in R$.

\+ Khi $m=1$ ta có $D=0, D_x \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm

Kết luận: $m \neq 1$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{m+1}{m-1};\dfrac{2m}{m-1}\right)$

$m=-\dfrac{1}{2}$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (4t-1;t)$, $t \in R$.

$m=1$ hệ phương trình vô nghiệm

Bài 3.49: Ta có: $D = \begin{vmatrix} m+1 & 8 \\ m & m+3 \end{vmatrix} = (m+1)(m+3) - 8m = m^2 - 4m + 3$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow m \neq 1$và $m \neq 3$.

Bài 3.50: Ta có: $D = -8 - m \;\; m+6 \;\; = -m^2 - 6m - 8$

$D_x = 2 \;\; m+1 \;\; - m \;\; m+3 \;\; = -m^2 - m + 2$

$D_y = -4 \;\; m+3 \;\; - \;\; m+1 \;\; m+6 \;\; = -m^2 - 11m - 18$

Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 6m - 8 = 0 \\ -m^2 - m + 2 = 0 \\ -m^2 - 11m - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Vậy hệ có vô số nghiệm khi $m=-2$.

Bài 3.51: Ta có $P(x;y) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} mx+2y-2m=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ (*)

$D=\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=m-2$

Nếu $D\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$ thì hệ phương trình (*) có nghiệm do đó $\min P(x;y)=0$.

Nếu $D=0 \Leftrightarrow m=2$ ta có

$P(x;y)=(2x+2y-4)^2+(x+y-3)^2=5(x+y)^2-22(x+y)+25$

$\Rightarrow P(x;y)=5\left(x+y-\frac{11}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\geq\frac{4}{5}$

Suy ra $\min P(x;y)=\frac{4}{5}\Leftrightarrow x+y-\frac{11}{5}=0$

Vậy $m\neq 2$ thì $\min P(x;y)=0$, $m=2$ thì $\min P(x;y)=\frac{4}{5}$.

Bài 3.52: Ta có: $D=-2(m-2)(m+2)$; $D_x=(m-2)(1-3m)$;

$D_y=(m-2)(m+3)$

a) Ta có hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases} D=0 \\ D_x^2+D_y^2\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy hệ có nghiêm $\Leftrightarrow m\neq -2$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m\neq\pm 2$ và $\begin{cases} x=\dfrac{3m-1}{2(m+2)} \\ y=-\dfrac{m+3}{2(m+2)} \end{cases}$.

$\Rightarrow x\geq 2y\Leftrightarrow\frac{3m-1}{2(m+2)}\geq-\frac{2(m+3)}{2(m+2)}\Leftrightarrow\frac{5m+5}{m+2}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m\geq -1 \\ m\neq 2 \end{cases} \\ m<-2\end{array}\right.$.

c) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m\neq\pm 2$

$P=x^2+3y^2=\frac{3m^2+3m+7}{m^2+4m+4}\Leftrightarrow(3-P)m^2+(3-4P)m+7-4P=0$ (1)

* $P=3$ thì (1) có nghiệm $m=-\frac{5}{9}$.

* $P\neq 3\Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=52P-75\geq 0\Leftrightarrow P\geq\frac{75}{52}$.

Đẳng thức xảy ra khi $m=\frac{8}{9}$.

Vậy P nhỏ nhất $\Leftrightarrow m=\frac{8}{9}$ và $MinP=\frac{75}{52}$.

Bài 3.53: Đặt: $\begin{cases} \sqrt{x+1}=u \\ \sqrt{y}=v \end{cases}$ $(u,v>0)$

Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} mu + v = m + 1 \\ ux + mv = 2 \end{cases}$

Ta có: $D = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m^2 - 1$

$D_u = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix} = m^2 + m - 2$; $D_v = \begin{pmatrix} m & am+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = m - 1$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $u = \dfrac{m+2}{m+1}$ và $v = \dfrac{1}{m+1}$

Vì điều kiện $u, v > 0$ nên ta có : $\begin{cases} \dfrac{m+2}{m+1} \geq 0 \\ \dfrac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó ta được: $\begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+3}{(m+1)^2} \\ y = \dfrac{1}{(m+1)^2} \end{cases}$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$

Với $m = 1 \Rightarrow D_u = D_v = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$

Với $m = -1 \Rightarrow D_u = 2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.