Đáp án chuyên đề: Hàm số bậc hai – Đại số 10

Bài 2.29: a) Vì (P) đi qua A, B nên $\begin{cases} 0 = 1 + b + c \\ -6 = 4 - 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 2b - c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = x^2 + 3x - 4$.

b) Vì (P) có đỉnh $I\ \ 1;\ \ 4$ nên $\begin{cases} \dfrac{-b}{2} = 1 \\ -\dfrac{b^2 - 4c}{4} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = \ \ x^2 - 2x + 5$.

c) (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3 suy ra $c = 3$

(P) có đỉnh $S\ \ -2;-1$ suy ra: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ -1 = 4a - 2b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases}$

Bài 2.30: a) $y = 4x^2 + 3x - 2$ b) $y = -x^2 + 3x - 2$

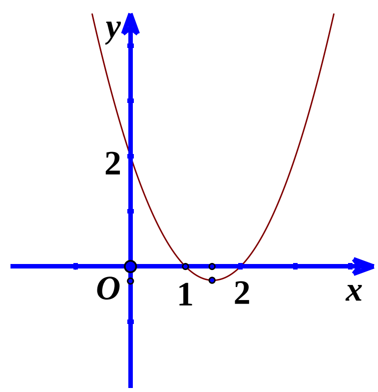
c) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ d) $y = 3x^2 + 3x - 2$

Bài 2.31: a) $y = x^2 - 3x + 2$ b) $y = -2x^2 - 8x + 3$ c) $y = \dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 5$

Bài 2.32: a) Ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}, -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4}$

Bảng biến thiên

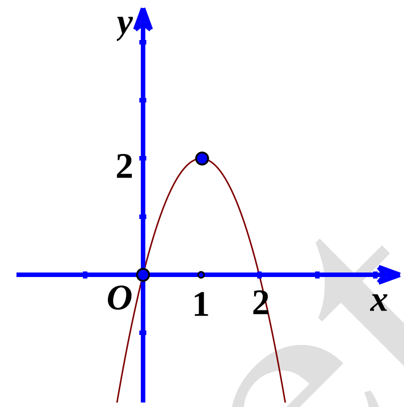
x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$y = x^2 - 3x + 2$	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗ $+\infty$



Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ có đỉnh là $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$, đi qua các điểm $A\ \ 2;0$, $B\ \ 1;0$, $C\ \ 0;2$, $D\ \ 3;2$

Nhận đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên

b) Ta có $-\dfrac{b}{2a}=1,-\dfrac{\Delta}{4a}=2$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$ $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$y=-x^2+2\sqrt{2}x$	2 $\nearrow$ $\quad$ $\searrow$ $-\infty$ $\qquad\qquad$ $-\infty$

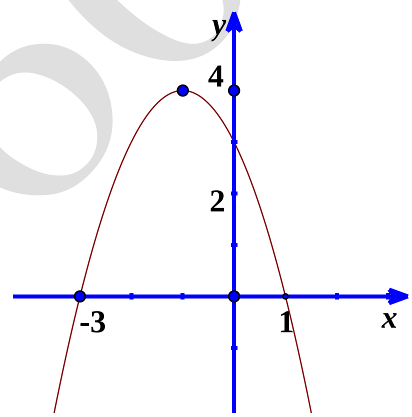
Suy ra đồ thị hàm số $y=-2x^2+4x$ có đỉnh là $I\ \ 1;2$, đi qua các điểm $O\ \ 0;0$, $B\ \ 2;0$

Nhận đường thẳng $x=1$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới

Bài 2.33: a) Ta có $-\dfrac{b}{2a}=-1,-\dfrac{\Delta}{4a}=4$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $+\infty$
$y=-x^2-2x+3$	4 $\nearrow$ $\quad$ $\searrow$ $-\infty$ $\qquad\qquad$ $-\infty$



Suy ra đồ thị hàm số $y=-x^2-2x+3$ có đỉnh là $I\ \ -1;4$, đi qua các điểm $A\ \ 1;0$, $B\ \ -3;0$

Nhận đường thẳng $x=-1$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới

b) Đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng với trục hoành do đó dựa vào đồ thị ta có

Với $m<4$ đường thẳng $y=m$ và parabol $y=-x^2-2x+3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

c) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm hoàn toàn trên trục hoành

Do đó hàm số chỉ nhận giá trị âm khi và chỉ khi $x\in\ \ -\infty;-3\ \ \cup\ \ 1;+\infty\ \ $.

d) $\max\limits_{[-3;1]} y=4$ khi và chỉ khi $x=-1$

$\min\limits_{[-3;1]} y=0$ khi và chỉ khi $x=-3,\ x=1$.

Bài 2.34: a) Đồ thị hàm số $y=\begin{cases} x^2-x & khi\ x\ge 1 \\ -x^2+x+2 & khi\ \ x<1 \end{cases}$ gồm :

+ Parabol $y = x^2 - x$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$, đi qua các điểm $O\ 0;0$, $A\ 1;0$ và lấy phần đồ thị nằm bên phải của đường thẳng $x = 1$

+ Parabol $y = -x^2 + x + 2$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$, đi qua các điểm $B\ -1;0$, $C\ 2;0$ và lấy phần đồ thị nằm bên trái của đường thẳng $x = 1$

b) Vẽ parabol P của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ có đỉnh $I\ 1;4$, trục đối xứng $x = 1$, đi qua các điểm $A\ -1;0$, $B\ 3;0$,$C\ 0;3$, $D\ 2;3$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \left|-x^2 + 2x + 3\right|$ gồm phần parabol P nằm phía trên trục hoành và phần đối xứng của P nằm dưới trục hoành qua trục hoành.

Bài 2.35: a) Vẽ đồ thị hàm số $P\ : y = -x^2 - 2x + 3$ có đỉnh $I\ -1;-4$, trục đối xứng $x = -1$, đi qua các điểm $A\ 1;0$, $B\ -3;0$,$C\ 0;3$, $D\ -2;3$. Bề lõm hướng xuống dưới.

Khi đó P_1 là đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2\left|x\right| + 3$ là gồm phần bên phải trục tung của P và phần lấy đối xứng của nó qua trục tung.

b) Gọi P_2 là phần đồ thị của P nằm trên trục hoành và lấy đối xứng của phần nằm dưới trục hoành qua trục Ox.

Vậy đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \left|-x^2 - 2x + 3\right| & khi\ x \ge 1 \\ -x^2 - 2\left|x\right| + 3 & khi\ x < 1 \end{cases}$ gồm phần bên đồ thị bên phải đường thẳng $x = 1$ của P_2 và phần đồ thị bên trái đường thẳng $x = 1$ của P_1 .

Bài 2.36: a) Đặt $t = x^2$, $x \in \left[-2;1\right] \Rightarrow t \in \left[0;4\right]$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 - 2t,\ t \in \left[0;4\right]$

Suy ra $\max\limits_{[-2;1]} y = 8 \Leftrightarrow x = -2,\ \min\limits_{[-2;1]} y = -1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

b) Ta có $y = x^4 + 2x^3 - x = (x^2 + x)^2 - (x^2 + x)$

Đặt $t = x^2 + x$. Xét hàm số $t = x^2 + x$ với $x \in [-1;1]$

Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, bảng biến thiên là

t	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$t = x^2 + x$	0 ↘	$-\frac{1}{4}$ ↗	2

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} t = -\dfrac{1}{4} \le t \le \max\limits_{[-1;1]} t = 2$

Khi đó, hàm số được viết lại : $f(t) = t^2 - t$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{4};2\right]$.

Bảng biến thiên

t	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	2
$f(t) = t^2 - t$	$\dfrac{5}{16}$ $\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$ 2

Từ bảng biến thiên ta có

$$\max_{[-1;1]} y = \max_{\left[-\frac{1}{4};2\right]} f(t) = 2 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$$\min_{[-1;1]} y = \min_{\left[-\frac{1}{4};2\right]} f(t) = -\frac{1}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } x^2 + x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Bài 2.37: Ta có: $7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 = 7\left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2\right] + 4x^2y^2$

$$= 7\left[\left(\frac{xy+1}{2}\right)^2 - 2x^2y^2\right] + 4x^2y^2 = \frac{1}{4}\left[-33(xy)^2 + 14xy + 7\right] = \frac{1}{4}\left(-33t^2 + 14t + 7\right), t = xy$$

Ta có $xy + 1 = 2(x^2 + y^2) \ge 4xy \Rightarrow xy \le \dfrac{1}{3}$

Mặt khác $2(x^2 + y^2) = xy + 1 \Leftrightarrow 2\left(x + y\right)^2 = 5xy + 1 \Rightarrow xy \ge -\dfrac{1}{5}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{4}\left(-33t^2 + 14t + 7\right)$, $t \in \left[-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có $\max\limits_{\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]} f(t) = \dfrac{70}{33} \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{33}$, $\min\limits_{\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]} f(t) = \dfrac{18}{25} \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{5}$

Bài 2.38: Do $x + y = 1$ nên :

$$S = 16x^2y^2 + 12\left(x^3 + y^3\right) + 9xy + 25xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12\left[\left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right)\right] + 34xy$$

$$= 26x^2y^2 - 2xy + 12.$$

Đặt $t = xy$, ta được: $S = 16t^2 - 2t + 12; 0 \le xy \le \dfrac{\ x + y\ ^2}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right]$.

Xét hàm số $f\ \ t\ \ = 16t^2 - 2t + 12$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{1}{4}\right]$ ta tìm được

Giá trị lớn nhất của S bằng $\dfrac{25}{2}$;

Khi $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow\ \ x; y\ \ = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của S bằng $\dfrac{191}{16}$; Khi $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \ x; y\ \ = \left(\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}; \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)$hoặc $\ x; y\ \ = \left(\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}; \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)$.