Đáp án chuyên đề: Đại cương về hàm số – Đại số 10

Bài 2.0: a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \ge 1 \\ |x| \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ne \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ne 2 \end{cases} \Rightarrow$ TXĐ: $D = [1;+\infty) \setminus \{2\}$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow$ TXĐ: $D = (1;+\infty)$

c) ĐKXĐ: $x^2+x+1 \ne 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ne 0$ (đúng $\forall x$) $\Rightarrow$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

e) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-x-6 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ne -2 \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ne 3 \end{cases} \Rightarrow$ TXĐ: $D = [-1;+\infty) \setminus \{3\}$.

f) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Bài 2.1: a) $D = [1;2]$ b) $\mathrm{D} = [-2;2] \setminus \{0\}$ c) $D = \left[\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ d) $D = [1;6]$

e) $\mathrm{D} = (-3;+\infty)$ f) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-2x+3 \ge 0 \\ x-3\sqrt{x}+2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+2 \ge 0 \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ x \ne 4 \end{cases}$

Suy ra $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1;4\}$

g) ĐKXĐ: $\begin{cases} 1-\sqrt{1+4x} > 0 \\ 1+4x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 1+4x \\ x \ge -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le x < 0 \Rightarrow D = \left[-\frac{1}{4};0\right)$

h) TXĐ: $\mathrm{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$

Bài 2.2: a) ĐKXĐ: $x \ne m$

Hàm số xác định trên $-1;0 \Leftrightarrow m \notin -1;0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -1 \end{array}\right.$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge m \end{cases}$ (*)

Nếu $m > 0$ thì (*) $\Leftrightarrow x \ge m \Rightarrow D = [m;+\infty)$ nên $m > 0$ không thỏa mãn

Nếu $m \le 0$ thì (*) $\Leftrightarrow x \ge 0 \Rightarrow D = [0;+\infty)$

Vậy $m \le 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 2.3: a) $m \ge 2$, b) $m \in [0;1]$ c) $m \in [1;3]$

Bài 2.4: a) Hàm số lẻ b) Hàm số chẵn

c) TXĐ: $D = [-1;1]$ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -f(x), \forall x \in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $x=-1\in D$ nhưng $-x=1\notin D$

Do đó hàm số không chẵn và không lẻ

e) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $f(1)=2,\ f(-1)=6$

Suy ra $f(-1)\neq f(1),\ f(-1)\neq -f(1)$

Do đó hàm số không chẵn và không lẻ.

f) TXĐ: $D=(-\infty-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x|-1}=-\frac{x^3}{|x|-1}=-f(x),\ \forall x\in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

g) TXĐ: $D=\mathbb{R}\Rightarrow\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$$f(-x)=\frac{|-x-1|+|-x+1|}{|-2x-1|+|-2x+1|}=f(x),\ \forall x\in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

h) ĐKXĐ: $|x-1|\neq|x+1|\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq x+1\\ x-1\neq-(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 0$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{|-x+2|+|-x-2|}{|-x-1|-|-x+1|}=-f(x),\ \forall x\in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài 2.5: $m=\frac{1}{2}$

Bài 2.6: a) Ta có hàm số $y=f(x)+g(x)$ có tập xác định D. Do hàm số $y=f(x),\ y=g(x)$ lẻ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$ suy ra

$y(-x)=f(-x)+g(-x)=-[f(x)+g(x)]=-y(x)$

Suy ra hàm số $y=f(x)+g(x)$ là hàm số lẻ.

b) Giả sử hàm số $y=f(x)$ chẵn, $y=g(x)$ lẻ

Khi đó hàm số $y=f(x).g(x)$ có tập xác định là D nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có $y(-x)=f(-x).g(-x)=f(x).[-g(x)]=-f(x).g(x)=-y(x)$

Do đó hàm số $y=f(x).g(x)$ lẻ.

Bài 2.7: a) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Đồ thị hàm số đã cho nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng khi và chỉ khi nó là hàm số lẻ

$\Leftrightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \left(-x\right)^3-(m^2-9)\left(-x\right)^2+(m+3)\left(-x\right)+m-3$

$=-\left[x^3-(m^2-9)x^2+(m+3)x+m-3\right],\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2(m^2-9)x^2-2\left(m-3\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-9=0 \\ m-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow m=3$

b) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Đồ thị hàm số đã cho nhận trục tung làm trục đối xứng khi và chỉ khi nó là hàm số chẵn

$\Leftrightarrow f\left(-x\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(-x\right)^4-(m^2-3m+2)\left(-x\right)^3+m^2-1=x^4-(m^2-3m+2)x^3+m^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2(m^2-3m+2)x^3=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Bài 2.9: a) Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$

b) Với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R},\ x_1\neq x_2$ ta có

$$K=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\left(x_2^2+4x_2-5\right)-\left(x_1^2+4x_1-5\right)}{x_2-x_1}=x_1+x_2+4$$

$x_1,x_2\in\left(-\infty;-2\right)\Rightarrow K<0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-2\right)$

$x_1,x_2\in\left(-2;+\infty\right)\Rightarrow K>0$ suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-2;+\infty\right)$

c) Với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R},\ x_1\neq x_2$ ta có

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\frac{2}{x_2-2}-\frac{2}{x_1-2}=\frac{2\left(x_1-x_2\right)}{\left(x_2-2\right)\left(x_1-2\right)}\Rightarrow K=-\frac{2}{\left(x_2-2\right)\left(x_1-2\right)}$$

Với $x_1,x_2\in\ -\infty;2\ \Rightarrow K<0$ do đó hàm số nghịch biến trên $\ -\infty;2$

Với $x_1,x_2\in\ 2;+\infty\ \Rightarrow K<0$ do đó hàm số nghịch biến trên $\ 2;+\infty$

d) Với mọi $x_1,x_2\in\left(-\infty;1\right),\ x_1\neq x_2$ ta có

$$f\ x_2\ -f\ x_1\ =\frac{x_2}{x_2-1}-\frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_1-x_2}{x_2-1\ \ x_1-1}$$

Suy ra $\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{-1}{\left(x_2-1\right)\left(x_1-1\right)}<0$

Vậy hàm số nghic biến trên $\left(-\infty;-1\right)$.

Bài 2.10: • Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^3+x_2)-(x_1^3+x_1)}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1^2+x_2x_1+1>0$$

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

• Ta có $x^3-x=\sqrt[3]{2x+1}+1 \Leftrightarrow x^3+x=2x+1+\sqrt[3]{2x+1}$

Đặt $\sqrt[3]{2x+1}=y$, phương trình trở thành $x^3+x=y^3+y$

Do hàm số $f(x)=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$x=y \Rightarrow \sqrt[3]{2x+1}=x \Leftrightarrow x^3-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Bài 2.11: a) Với mọi $x_1, x_2 \in [1;+\infty)$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(\sqrt{x_2-1}+x_2^2-2x_2\right)-\left(\sqrt{x_1-1}+x_1^2-2x_1\right)$$

$$=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}}+(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Suy ra $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}}+x_2+x_1-2>0$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nó đồng biến trên $[2;5]$

Vậy $\max\limits_{[2;5]} y=y(5)=17 \Leftrightarrow x=5$, $\min\limits_{[2;5]} y=y(2)=1 \Leftrightarrow x=2$

Bài 2.12: a) $f(0)=5 \Leftrightarrow m+1=5 \Leftrightarrow m=4$

b) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;0)$ khi và chỉ khi

$$0=-3+m^2+m+1 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Bài 2.13: a) Ta có $y=x^3+2(m-1)x^2+(m^2-4m+1)x-2(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2(x-2)+m(2x^2-4x)+x^3-2x^2+x-2-y=0$

Tọa độ điểm cố định mà họ đồ thị đồ thị luôn đi qua là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 2x^2-4x=0 \\ x^3-2x^2+x-2-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $A(2;0)$.

b) Điểm cố định là $A(-4;3)$, $B(0;1)$

Bài 2.14: Điểm $M(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi

$f(1)=0 \Leftrightarrow 0=2+(m-1)+(m^2-1)+2(m^2-3m+2)-3$

$\Leftrightarrow 3m^2-5m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$

Vậy $m=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2.15: a) Ta tịnh tiến đồ thị hàm số $y=-x^2+2$ sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=-(x+2)^2+2$ rồi tịnh tiến lên trên $\dfrac{1}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=-(x+2)^2+2+\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $x^3+3x^2+3x+6=(x+1)^2+5$

Do đó tịnh tiến đồ thị hàm số $y=x^3$ để được đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+3x+6$ ta làm như sau

Tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số $y=x^3$ đi sang bên trái 1 đơn vị và lên trên đi 5 đơn vị.