Đáp án chuyên đề: Bất đẳng thức – Đại số 10

Bài 4.0: a) BĐT $\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\ge 0$

b) BĐT$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$

c) BĐT $\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$

d) BĐT$\Leftrightarrow (a-b+c)^2\ge 0$

Bài 4.1: a) BĐT $\Leftrightarrow (a-b)c<0$

b) Sử dụng câu a), ta được: $\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}$, $\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$, $\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{a+b+c}$.

Cộng các BĐT vế theo vế, ta được đpcm.

c) Sử dụng tính chất phân số, ta có: $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+c}$

Tương tựta có $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b}{b+d}$, $\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c}{a+c}$;

$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d}{d+b}$. Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

d) Chứng minh tương tự câu c). Ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Cùng với 3 BĐT tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 4.2: a) BĐT $\Leftrightarrow abx^2+\left(a^2+b^2\right)xy+aby^2\ge\left(a+b\right)^2xy$

$\Leftrightarrow ab\left(x-y\right)^2\ge 0$ (đúng)

b) Bình phương 2 vế, ta phải chứng minh: $\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}\ge\frac{(c+b)^2}{c^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)(c^2-ab)\ge 0$. Điều này hiển nhiên đúng do giải thiết.

c) Ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2c},\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}$

BĐT $\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b}+1}{2\frac{a}{b}-1}+\frac{\frac{c}{b}+1}{2\frac{c}{b}-1}\ge 4\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2c}+1}{1+\frac{a}{c}-1}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}+1}{1+\frac{c}{a}-1}\ge 4$

$\Leftrightarrow\frac{3c}{2a}+\frac{1}{2}+\frac{3a}{2c}+\frac{1}{2}\ge 4\Leftrightarrow\frac{3}{2}\frac{a^2+c^2}{ac}\ge 3\Leftrightarrow\left(a-c\right)^2\ge 0$ (đúng)

d) BĐT $\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ (đúng)

Bài 4.3: a) BĐT $\Leftrightarrow -x^3y+xy^3+x^3z-y^3z-xz^3+yz^3\le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)\le 0$ (đúng vì $x\ge y\ge z\ge 0$)

b) BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx)\ge 0$ (đúng vì $x\ge y\ge z\ge 0$)

Bài 4.4: Ta có: $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{a+b}{ab}}+\dfrac{1}{\frac{c+d}{cd}}\le \dfrac{1}{\frac{a+b+c+d}{a+c\quad b+d}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{cd}{c+d}\le \dfrac{a+c\quad b+d}{a+b+c+d}\Leftrightarrow \dfrac{ab\;\; c+d\;\; +cd\;\; a+b}{a+b\quad c+d}\le \dfrac{a+c\quad b+d}{a+b+c+d}$

$\Leftrightarrow \dfrac{abc+abd+acd+bcd}{ac+ad+bc+bd}\le \dfrac{ab+ad+bc+cd}{a+b+c+d}$

$\Leftrightarrow \;\; a+b+c+d\quad abc+abd+acd+bcd\;\; \le\;\; ab+ad+bc+cd\quad ac+ad+bc+bd$

$\Leftrightarrow 2abcd\le a^2d^2+b^2c^2\Leftrightarrow a^2d^2-2abcd+b^2c^2\ge 0\Leftrightarrow \;\; ad-bc\;\;^2\ge 0.$

Do bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Bài 4.5: Vì $a,b,c\in\left[1;3\right]$ do đó ta có

$a-1\quad b-1\quad c-1\; +\; 3-a\quad 3-b\quad 3-c\;\;\ge 0$

$\Leftrightarrow 2\;\; ab+bc+ca\;\; -8\;\; a+b+c\;\; +26\ge 0\Leftrightarrow \;\; a+b+c\;\;^2-8\;\; a+b+c\;\; +26\ge a^2+b^2+c^2$

Mà $a+b+c=6$ suy ra $a^2+b^2+c^2\le 14$.

Bài 4.6: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có:

$x^3+y^2\ge 2xy\sqrt{x}\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}\le \dfrac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}}=\dfrac{1}{xy}$.

Tương tự: $\dfrac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}\le \dfrac{1}{yz};\;\dfrac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le \dfrac{1}{zx}\Rightarrow \text{VT}\le \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\le \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$

Vậy : $\text{VT}\le \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.7: Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $1+x^3+y^3\ge 3xy\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\dfrac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$, $\dfrac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \quad 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{yz}}+\dfrac{1}{\sqrt{zx}} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=3 \qquad 2$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 4.8: $\dfrac{1}{1+a}=1-\dfrac{a}{1+a}=\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{1+b \quad 1+c \quad 1+d}}$

Xây dựng các BĐT tương tự rồi nhân vế với vế ta được $abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Bài 4.9: $1-\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{1+b-a}{1+b}=\dfrac{b}{1+c}+\dfrac{c}{1+a} \geq 2\sqrt{\dfrac{bc}{1+c \quad 1+a}}$

Chứng minh tương tự, ta thu được:

$$1+b-a \quad 1+c-b \quad 1+a-c \geq 8abc$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-a\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right) \geq 8$$

Bài 4.10: Ta có $1=xyz \quad x+y+z \quad = yz \quad x^2+xy+xz$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$P= \quad x \; + \; y \quad x \; + \; z \quad = yz+ \quad x^2+xy+zx \quad \geq 2\sqrt{yz. \quad x^2+xy+zx} \quad =2$

Suy ra $\min P=2$.

Bài 4.11: Ta có $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{ab+cb+ca+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b \quad a+c}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right)$

Tương tự $\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}\right), \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{c}{b+c}\right)$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.12: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$$

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a+b}+\dfrac{bc}{a+c}\right), \dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ca}{b+a}+\dfrac{ca}{b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được $\dfrac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}} \le \dfrac{1}{2}$.

Bài 4.13: BĐT $\Leftrightarrow a+b+c+\dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \ge 6$

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+b+c+\dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \ge 2\sqrt{\dfrac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{\dfrac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}} \ge 6$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (đúng)

Bài 4.14: Ta có $(1+abc)\left(\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\right)+3=$

$$=\left(\frac{1+abc}{a(1+b)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{b(1+c)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{c(1+a)}+1\right)$$

$$=\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)}+\frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)}+\frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)}$$

$$=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+b)}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{c(1+a)}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1+a}{a(1+b)}.\frac{1+b}{b(1+c)}.\frac{1+c}{c(1+a)}} = 3$$

$$\frac{b\ \ 1+c}{a\ \ 1+b}+\frac{c\ \ 1+b}{b\ \ 1+c}+\frac{a\ \ 1+b}{c\ \ 1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b\ \ 1+c}{a\ \ 1+b}.\frac{c\ \ 1+b}{b\ \ 1+c}.\frac{a\ \ 1+b}{c\ \ 1+a}}=3$$

Suy ra $\ 1+abc\ \left(\frac{1}{a\ \ 1+b}+\frac{1}{b\ \ 1+c}+\frac{1}{c\ \ 1+a}\right)+3\geq 6$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a\ \ 1+b}+\frac{1}{b\ \ 1+c}+\frac{1}{c\ \ 1+a}\geq \frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4.15: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}.\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}.\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\geq 1$ (*)

Ta có $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\geq \frac{2\sqrt{ab}}{2ab}.\frac{2\sqrt{bc}}{2bc}.\frac{2\sqrt{ca}}{2ca}=\frac{2}{abc}$ (1)

Mặt khác $3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4.16: Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{a}{a}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}\geq \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$, $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\geq \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\geq 3.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3$

Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4.17: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3a(2b+2c-a)}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}\geq\frac{b\sqrt{6}}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}\geq\frac{c\sqrt{6}}{a+b+c}$

Cộng 3 BĐT trên ta được:

$P\geq\frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{a+b+c}=\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy $\min P=\sqrt{6}$.

Bài 4.18: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a^3+b^3+b^3\geq 3ab^2,\ b^3+c^3+c^3\geq 3bc^3,\ c^3+a^3+a^3\geq 3ca^2$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$3\ \ a^3+b^3+c^3\ \ \geq 3\ \ ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\geq ab^2+bc^2+ca^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{a^3}{b}+ab\geq 2a^2$, $\frac{b^3}{c}+bc\geq 2b^2$, $\frac{c^3}{a}+ca\geq 2c^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\geq 2\ \ a^2+b^2+c^2$

(1)

Lại có, $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\geq 2\ \ ab+bc+ca$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

c) Áp dụng BĐT côsi $\frac{a^6}{b^3}+\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}\geq\frac{3a^4}{c}$

Chứng minh tương tự, ta thu được: $\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\geq\frac{a^4}{c}+\frac{b^4}{a}+\frac{c^4}{b}$

Bài 4.19: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a^3+b^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\geq ab\sqrt{3}$

$b^3+c^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\geq bc\sqrt{3},\ c^3+a^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\geq ca\sqrt{3}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\ \ a^3+b^3+c^3\ \ +\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}\ \ ab+bc+ca\ \ =\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 2\ \ a^3+b^3+c^3\ \ \geq\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4.20: Ta có: $4\ \ a+b+c\ \ =3abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{8}\geq\frac{3}{2}.\frac{1}{ab}$

$\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{8}\geq\frac{3}{2}.\frac{1}{bc},\ \frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{8}\geq\frac{3}{2}.\frac{1}{ca}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+\frac{3}{8}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{9}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq\frac{3}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Bài 4.21: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b}{2}+\frac{b+c}{4}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b\ \ b+c}.\frac{b}{2}.\frac{b+c}{4}}=\frac{3}{2}a$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c}{2}+\frac{c+a}{4}\geq\frac{3}{2}b$, $\frac{c^3}{a\ \ a+b}+\frac{a}{2}+\frac{a+b}{4}\geq\frac{3}{2}c$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c^3}{a\ \ a+b}+a+b+c\geq\frac{3}{2}\ \ a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c^3}{a\ \ a+b}\geq\frac{1}{2}\ \ a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^3}{b+2c\ ^{2}}+\frac{b+2c}{27}+\frac{b+2c}{27}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c\ ^{2}}.\frac{b+2c}{27}.\frac{b+2c}{27}}=\frac{a}{3}$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c+2a\ ^{2}}+\frac{c+2a}{27}+\frac{c+2a}{27}\geq\frac{b}{3}$,

$$\frac{c^3}{a+2b\ ^{2}}+\frac{a+2b}{27}+\frac{a+2b}{27}\geq\frac{c}{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b+2c\ ^{2}}+\frac{b^3}{c+2a\ ^{2}}+\frac{c^3}{a+2b\ ^{2}}+\frac{a+b+c}{9}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b+2c\ ^{2}}+\frac{b^3}{c+2a\ ^{2}}+\frac{c^3}{a+2b\ ^{2}}\geq\frac{2\ \ a+b+c}{9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 4.22: Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực không âm ta có :

$x^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{x^3.1.1}=3x\Leftrightarrow x^3+2\geq 3x$.Tương tự : $y^3+2\geq 3y;\ z^3+2\geq 3y$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được : $x^3+y^3+z^3+6\ge 3(x+y+z)$

Mặt khác : $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\Rightarrow 2(x+y+z)\ge 6$.

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3+6\ge (x+y+z)+2(x+y+z)\Rightarrow x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.23: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$a^4+\dfrac{1}{81}\ \ge \dfrac{2}{9}a^2$; $b^4+\dfrac{1}{81}\ \ge \dfrac{2}{9}b^2$ **;** $c^4+\dfrac{1}{81}\ \ge \dfrac{2}{9}\ b^2$ cộng ba BĐT lại với nhau

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+\frac{1}{27}\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{9}+\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\ .$$

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 9(a^4+b^4+c^4)\ge\ a^2+b^2+c^2$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 4.24: Đặt $a=1+\dfrac{1}{x};\ b=1+\dfrac{1}{y};\ c=1+\dfrac{1}{z}\Rightarrow a+b+c\ge 12$

Ta có : $a^4+4^4+4^4+4^4\ge 4\sqrt[4]{4^{12}a^4}=4^4a\Leftrightarrow a^4+3.4^4\ge 4^4a$. Tương tự

$b^4+3.4^4\ge 4^4b;\quad c^4+3.4^4\ge 4^4c$ cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được

$a^4+b^4+c^4+9.4^4\ge 4^4(a+b+c)\ge 12.4^4\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge 3.4^4=768$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=4\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 4.25: a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{1}{2ab}+2\sqrt{\frac{1}{2ab\ \ a^2+b^2}}\ge\frac{2}{a+b\ ^{2}}+2\sqrt{\frac{4}{a+b\ ^{2}}}=6$$ b)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab}+4ab=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{5}{4ab}+\left(\frac{1}{4ab}+4ab\right).$$

$$A\ge\frac{4}{a+b\ ^{2}}+\frac{5}{a+b\ ^{2}}+4\sqrt{\frac{1}{4ab}.4ab}=4+5+4=11.$$

c) Ta có $\left(a^2+\dfrac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\dfrac{1}{a^2}\right)=\dfrac{a^2b^2+1}{b^2}.\dfrac{a^2b^2+1}{a^2}=\left(ab+\dfrac{1}{ab}\right)^2$

Ta có: $\quad ab+\dfrac{1}{ab}=\left(ab+\dfrac{1}{16ab}\right)+\dfrac{15}{16ab}\qquad(1)$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $ab+\dfrac{1}{16ab}\ge 2\sqrt{ab.\dfrac{1}{16ab}}=\dfrac{1}{2}$ (2)

mà $\dfrac{1}{2}=\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ nên $ab\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{ab}\ge 4$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow ab+\dfrac{1}{ab}\ge\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{16}.4=\dfrac{17}{4}$

$\Rightarrow\left(a^2+\dfrac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\ge\left(\dfrac{17}{4}\right)^2=\dfrac{289}{16}$

Bài 4.26: Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\dfrac{1}{4}\ge a\Rightarrow a^2+b+\dfrac{3}{4}\ge a+b+\dfrac{1}{2}$

$b^2+\dfrac{1}{4}\ge b\Rightarrow b^2+a+\dfrac{3}{4}\ge a+b+\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\left(a^2+b+\dfrac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\dfrac{3}{4}\right)\ge\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)^2$ (1)

Theo BĐT côsi ta lại có $\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)\left(2b+\dfrac{1}{2}\right)\le\left(\dfrac{2a+2b+1}{2}\right)^2=\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.27: Trước tiên, ta dễ dàng có $xyz\le 1$

Áp dụng côsi ta có $\dfrac{1}{xyz}+\dfrac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$$=\frac{1}{2xyz}+\left[\frac{1}{2xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]\ge\frac{1}{2xyz}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$=\frac{1}{2xyz}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy+xz\quad yz+yx\quad zx+zy}}$$

$$\ge\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}}=\frac{3}{2}$$

Bài 4.28: Ta có $\dfrac{x^3}{y^3+8}+\dfrac{y+2}{27}+\dfrac{y^2-2y+4}{27}\ge\dfrac{x}{3}\Rightarrow\dfrac{x^3}{y^3+8}\ge\dfrac{9x+y-y^2-6}{27}$

Tương tự ta có

$\dfrac{y^3}{z^3+8} \geq \dfrac{9y+z-z^2-6}{27}, \dfrac{z^3}{x^3+8} \geq \dfrac{9z+x-x^2-6}{27}$ nên

$VT \geq \dfrac{10\left(x+y+z\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)-18}{27} = \dfrac{12-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{27}$ mà ta lại có

$\dfrac{12-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{27} = \dfrac{3+\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{27} = \dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{27}\left(xy+yz+zx\right)$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh . Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 4.29: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{\left(a+4b\right)\left(3a+2b\right)} \leq \frac{1}{2}\left(4a+6b\right) = 2a+3b$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \geq \frac{a^2}{2a+3b}$$

Mặt khác $\dfrac{a^2}{2a+3b}+\dfrac{2a+3b}{25} \geq \dfrac{2a}{5} \Rightarrow \dfrac{a^2}{2a+3b} \geq \dfrac{8a-3b}{25}$

Do đó $\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \geq \dfrac{8a-3b}{25}$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} \geq \dfrac{8b-3c}{25}, \dfrac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \dfrac{8c-3a}{25}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.30: Áp dụng bất đẳng thức BĐT côsi ta có

$$6\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} \leq \left(1+\frac{16x}{y+z}\right)+9 = \frac{2(8x+5y+5z)}{y+z}$$

Suy ra $\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}} \leq \dfrac{8x+5y+5z}{3(y+z)}$ $(*)$. Sử dụng (*), ta có

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} = \left(\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}-1\right)+1 = \frac{\frac{16x}{y+z}}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+1}+1 \geq \frac{\frac{16x}{y+z}}{\frac{8x+5y+5z}{3(y+z)}+1}+1 = \frac{6x}{x+y+z}+1.$$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{1+\dfrac{16y}{z+x}} \geq \dfrac{6y}{x+y+z}+1,\quad \sqrt{1+\dfrac{16z}{x+y}} \geq \dfrac{6z}{x+y+z}+1.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.31: Ta có $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(a+1)^2-2a}=\sqrt{(a+1-\sqrt{2a})(a+1+\sqrt{2a})}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2a})(2-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2a})}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{a^2+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(2+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2a})+(2-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2a})}{2}=\sqrt{2}(a-\sqrt{a}+1)$$

Tương tự ta có $\sqrt{b^2+1}\le\sqrt{2}(b-\sqrt{b}+1)$, $\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}(c-\sqrt{c}+1)$

Cộng vế với vế các BĐT ta có

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}(a+b+c-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+3)\quad(1)$$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\ge 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}(a+b+c)$

Bài 4.32: a) BĐT $\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b})\ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}$$

Áp dụng BDT côsi ta có có :

$$\frac{a^2}{b^2}+1\ge\frac{2a}{b};\ \frac{b^2}{c^2}+1\ge\frac{2b}{c};\ \frac{a^2}{b^2}+1\ge\frac{2a}{b};\ \frac{b^2}{c^2}+1\ge\frac{2b}{c};\ \frac{c^2}{a^2}+1\ge\frac{2c}{a}$$

Mặt khác $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 6$

Cộng các vế các BĐT lại ta có ĐPCM.

b) Ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\sqrt{\frac{1}{1+x^3}}$ với $x=\frac{b+c}{a}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-x+1}}\ge\frac{2}{x^2+2}=\frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+1}=\frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2}$$

Mặt khác ta có $(b+c)^2\le 2(b^2+c^2)\Rightarrow\frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Do đó ta có $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^3+\ \ b+c\ ^3}} \geq \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Tương tự ta có $\sqrt{\dfrac{b^3}{b^3+\ \ c+a\ ^3}} \geq \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\sqrt{\dfrac{c^3}{c^3+\ \ a+b\ ^3}} \geq \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.33: Không mất tính tổng quát giả sử $(1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x+y-xy \leq 1$

Suy ra $z(x+y-xy) \leq z \Rightarrow xy+yz+zx-xyz \leq xy+z$

Mặt khác, theo BĐT côsi ta có $xy = \sqrt[3]{x^3.y^3.1} \leq \dfrac{x^3+y^3+1}{3}$; $z = \sqrt[3]{z^3.1.1} \leq \dfrac{z^3+1+1}{3}$.

Suy ra $xy+z \leq \dfrac{x^3+y^3+z^3+3}{3} = 2$ ĐPCM.

Bài 4.34: Phân tích: Do vai trò của x, y bình đẳng nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y$ .Vì vậy ta cần chọn các số dương m, n sao cho khi đánh giá xuất hiện biểu thức $S = x+y+2z$.

Ta có : $x^2+m^2 \geq 2mx, y^2+m^2 \geq 2my,\ z^2+n^2 \geq 2nz$

Do đó ta cần chọn m, n thỏa mãn $x = y = m,\ z = n,\ n = 2m$ và $x^2+y^2+z^2 = 18$

Suy ra $m = \sqrt{3},\ n = 2\sqrt{3}$. Ta có lời giải như sau

Áp dụng BĐT côsi ta có

$x^2+3 \geq 2\sqrt{3}x, y^2+3 \geq 2\sqrt{3}y,\ z^2+12 \geq 4\sqrt{3}z$

Suy ra $x^2+y^2+z^2+18 \geq 2\sqrt{3}\ \ x+y+2z\ \ \Leftrightarrow x+y+2z \leq 6\sqrt{3}$

Do đó minS=$6\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3}, z = 2\sqrt{3}$

Bài 4.35: Áp dụng BĐT côsi ta có $a^3+m^3+m^3 \geq 3m^2a$, $c^3+m^3+m^3 \geq 3m^2c$

$64b^3+n^3+n^3 \geq 12n^2b$ (m, n dương)

Do đó ta cần chọn tham số m, n sao cho $3m^2 = 12n^2$, $a = c = m,\ 4b = n$ và $a+b+c = 3$

Từ đó ta tìm được $m = \dfrac{24}{17},\ n = \dfrac{12}{17}$. Ta dễ dàng có được lời giải bài toán.

Bài 4.36: Ta đưa vào tham số và đánh giá như sau

$$\frac{x^2}{2}+my^2\geq 2\sqrt{\frac{m}{2}}xy;\ \frac{x^2}{2}+nz^2\geq 2\sqrt{\frac{n}{2}}xz;\quad 2-m\ \ y^2+\ \ 3-n\ \ z^2\geq 2\sqrt{\ 2-m\quad 3-n\ }\,yz$$

Cần cho m, n sao cho $\sqrt{\ 2-m\quad 3-n\ }=\sqrt{\frac{m}{2}}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,(0<m,n\leq 2)$

Ta có $m=n=\frac{3}{2}$

Chú ý: đối với bài toán tổng quát , Tìm GTNN của $P=mx^2+ny^2+pz^2$ ta đưa về $P=m\left(x^2+\frac{n}{m}y^2+\frac{p}{m}z^2\right)$ và là tương tự như trên.

Bài 4.37: Đặt $P=a^3+2b^3+3c^3$

Với các số thực dương α,β,γ chọn sau ta có

$$2P=(a^3+\alpha^3+\alpha^3)+2(b^3+b^3+\beta^3)+3(c^3+c^3+\gamma^3)-(\alpha^3+2\beta^3+3\gamma^3)$$
$$\geq 3\alpha a^2+6\beta b^2+9\gamma c^2-(\alpha^3+2\beta^3+3\gamma^3)$$

Cần chọn $\alpha=2\beta=3\gamma=t$ và kết hợp với dấu đẳng thức xảy ra khi

$a=\alpha,b=\beta,c=\gamma,a^2+b^2+c^2=1$ ta được $\alpha=\frac{6}{7},\beta=\frac{6}{14},\gamma=\frac{6}{21}$

Vậy $2P\geq 3.\frac{6}{7}(a^2+b^2+c^2)-\frac{6}{7}\Rightarrow P\geq\frac{6}{7}$

Bài 4.38: Áp dụng BĐT côsi ta có $x+\frac{1}{2}\sqrt{x.4y}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z}\leq\frac{4}{3}(x+y+z)$

Bài 4.38: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^2}{b+c}+\frac{4}{9}(b+c)\geq\frac{4}{3}a\\ \frac{b^2}{c+a}+\frac{4}{9}(a+c)\geq\frac{4}{3}b\\ \frac{16c^2}{a+b}+(a+b)\geq 8c\end{array}\right|\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\geq\frac{1}{9}(64c-a-b)$$

Bài 4.39: $y^2+yz+z^2=1-\frac{3x^2}{2}$

$$\Leftrightarrow(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2)+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2)+yz+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=1.$$

Ta có $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\geq xy,\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2\geq yz$

Suy ra $\frac{1}{2}(x+y+z)^2 \le 1 \Leftrightarrow |P| \le \sqrt{2}$.

Bài 4.40: Ta có: $\frac{x^2}{x+y} = \frac{x\ \ x+y\ \ -xy}{x+y} = x - \frac{xy}{x+y} \ge x - \frac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y^2}{y+z} \ge y - \frac{\sqrt{yz}}{2}; \frac{z^2}{z+x} \ge z - \frac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra: $T \ge x+y+z - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2} = x+y+z-\frac{1}{2} \ge 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(vì $x+y+z \ge \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} = 1$)

Vậy $\min T = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 4.41: Theo BĐT côsi ta có

$A = x+y+z - \left(\frac{xy^2}{x+y^2} + \frac{yz^2}{y+z^2} + \frac{zx^2}{z+x^2}\right) \ge 3 - \frac{1}{2}\ \ \sqrt{x}y + \sqrt{y}z + \sqrt{z}x$

Lại có $\sqrt{x}y + \sqrt{y}z + \sqrt{z}x \le \frac{1}{2}[(x+1)y + (y+1)z + (z+1)x] = \frac{1}{2}(x+y+z+xy+yz+zx)$

$\le \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{3}(x+y+z)^2) = 3$

$\Rightarrow A \ge \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$

Vậy $minA = \frac{3}{2}$

Bài 4.42: Đặt $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ (với a,b,c dương)

$\Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$

$2VT = \frac{25\ \ b+c-a}{a} + \frac{4\ \ c+a-b}{b} + \frac{9\ \ a+b-c}{c} = \left(\frac{25b}{a} + \frac{4a}{b}\right) + \left(\frac{25c}{a} + \frac{9a}{c}\right) + \left(\frac{4c}{b} + \frac{9b}{c}\right) - 38$

$\ge 20 + 30 + 12 = 24 \Rightarrow VT \ge 12$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 25b^2 = 4a^2 \\ 25c^2 = 9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 2a \\ 5c = 3a \end{cases} \Rightarrow 5b + 5c = 5a \Rightarrow x = 0$ (vô lí)

Bài 4.43: Đặt $x = a+b+2c,\ y = 2a+b+c,\ z = a+b+3c$

Suy ra $a = -2x+y+z,\ b = 5x-y-3z,\ c = z-x$

Bất phương trình trở thành $\frac{-8x+4y+4z}{x}+\frac{2x-y}{y}-\frac{-8x+8z}{z}\geq 12\sqrt{2}-17$

$\Leftrightarrow +\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)\geq 12\sqrt{2}$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\geq 4\sqrt{2}$, $\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\geq 8\sqrt{2}$

Cộng vế với vế lại suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Bài 4.44: Áp dụng BĐT Côsi ta có

$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow \frac{x+y+z}{27}^{3}\geq xyz$

Mặt khác $xyz\geq x+y+z$ suy ra $\frac{x+y+z}{27}^{3}\geq x+y+z+2$

Đặt $t=x+y+z, t>0$ ta có $\frac{t^3}{27}\geq t+2\Leftrightarrow t^3-27t-54\geq 0\Leftrightarrow\ t-6\quad t+3^{\ 2}\geq 0\Leftrightarrow t\geq 6$

Suy ra $x+y+z\geq 6$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Bài 4.45: Sử dụng bất đẳng thức côsi ta có $\frac{a^{11}}{bc}+abc\geq 2\sqrt{\frac{a^{11}}{bc}.abc}=2a^6$

Tương tự ta có $\frac{b^{11}}{ca}+abc\geq 2b^6$, $\frac{c^{11}}{ab}+abc\geq 2c^6$

Từ đó suy ra $\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}\geq 2(a^6+b^6+c^6)-3abc$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $2(a^6+b^6+c^6)-3abc+\frac{3}{a^2b^2c^2}\geq\frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$

Hay là $3(a^6+b^6+c^6)+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\geq 9$

Bây giờ lại sử dụng bất đẳng thức côsi ta được $a^6+b^6+c^6\geq 3a^2b^2c^2$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $9a^2b^2c^2+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\geq 9$

Đặt $t=abc, t>0$. BĐT trở thành $9t^2+\frac{6}{t^2}-6t\geq 9$

Sử dụng bất đẳng thức côsi ta được

$9t^2+\frac{6}{t^2}-6t\geq 9t^2+\frac{6}{t^2}-3(t^2+1)=6t^2+\frac{6}{t^2}-3\geq 12-3=9$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 4.46: Từ điều kiện suy ra $x, y, z \in [0;2]$. Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$27(2-x)(2-y)(2-z) \le (2-x+2-y+2-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\left[8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz\right] \le (8-x-y-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\left[8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)-4\right] \le (8-x-y-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\left[4-4(x+y+z)+(x+y+z)^2\right] \le (8-x-y-z)^3$$

Đặt $t = x+y+z$, $t \ge 0$ ta có

$$\Leftrightarrow 27(t^2-4t+4) \le (6-t)^3 \Leftrightarrow t^3+9t^2-108 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+6)^2 \le 0 \Leftrightarrow t \le 3$$

Suy ra $x+y+z \le 3$.

Bài 4.47: Giả thiết của bài toán và P là những đa thức đối xứng ba biến nên ta biểu diễn các đa thức này qua ba đa thức đối xứng cơ bản $x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$.

Ta có: $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2$

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Suy ra:

$$\left|P\right| = \left|(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\right| = \left|(x+y+z)(2-\frac{(x+y+z)^2-2}{2})\right|$$

Đặt $t = \left|x+y+z\right|, t \ge 0$ suy ra $\left|P\right| = t(2-\frac{t^2-2}{2}) = -\frac{t^3}{2}+3t$.

Ta sẽ đi chứng minh $-\frac{t^3}{2}+3t \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^3+4\sqrt{2} \ge 6t$

Thật vậy theo BĐT côsi ta có $t^3+4\sqrt{2} = t^3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2} \ge 3\sqrt[3]{t^3.2\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = 6t$

Do đó $\left|P\right| \le 2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2}$.

Ta có $P = 2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x = \sqrt{2}$, $y = z = 0$, $P = -2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x = -\sqrt{2}$, $y = z = 0$,

Vậy $\min P = -2\sqrt{2}$, $\max P = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét :

1) Việc chúng biết phải đi chứng minh $-\frac{t^3}{2}+3t \le 2\sqrt{2}$ là do chúng ta dự đoán được dấu bằng xảy ra tại biên.

2) Ta có mọi đa thức đối xứng ba ẩn luôn biểu diễn qua được các đa thức đối xứng sơ cấp ~~$a = x+y+z; b = xy+yz+zx; c = xyz$. Hơn nữa giữa ba đa thức đối xứng sơ cấp này~~ luôn có sự

đánh giá qua lại giữa chúng, cụ thể $a^2 \geq 3b \geq 9\sqrt[3]{c^2}$. Với bài toán trên từ giả thiết ta có:

$a^2 - 2b = 2 \Leftrightarrow b = \dfrac{a^2-2}{2}$ tức là ta đã thay thế b bởi a do đó khi biểu diễn $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thì chỉ còn hai biến là a và c. Mặt khác ta luôn đánh giá được c qua a (hoặc a qua c) và lúc đó trong P chỉ còn một biến là a hoặc c.

Bài 4.48: Ta có $xyz = (1-x)(1-y)(1-z) \Leftrightarrow 1 - (x+y+z) + xy + yz + zx = 2xyz$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4xyz$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$ nên

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

Đặt $t = x+y+z$ thì $0 < t < 3$. Khi đó:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2 = \frac{1}{27}(2t-3)^2\left(\frac{15}{4} - t\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = \dfrac{3}{2}$ hay $x = y = z = \dfrac{1}{2}$. ĐPCM

Cho $x, y \in R$ và $x, y > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{(x^3+y^3) - (x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$.

Đặt $t = x + y;\ t > 2$. ta có $xy \leq \dfrac{t^2}{4}$.

$P = \dfrac{t^3 - t^2 - xy(3t-2)}{xy - t + 1}$. Do $3t - 2 > 0$ và $-xy \geq -\dfrac{t^2}{4}$ nên ta có

$$P \geq \frac{t^3 - t^2 - \frac{t^2(3t-2)}{4}}{\frac{t^2}{4} - t + 1} = \frac{t^2}{t-2} = t - 2 + \frac{4}{t-2} + 4 \geq 8$$

$\min P = \min\limits_{(2;+\infty)} f(t) = f(4) = 8$ đạt được khi $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài 4.49: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$P \geq \frac{6(2x^2 + 13y^2 - xy) - 6xy}{(x+2y)^2} = 6.\frac{2x^2 + 13y^2 - 2xy}{(x+2y)^2} = 6.Q$$

Rõ ràng $y \neq 0$ ta có $Q = \dfrac{2t^2 - 2t + 13}{(t+2)^2}, t = \dfrac{x}{y}$

Xét $Q - 1 = \dfrac{(t-3)^2}{(t+2)^2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 1 \Rightarrow P \geq 6$

Suy ra $\min P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{\dfrac{3}{28}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{28}} \end{cases}$.

Cho *a*,*b*,*c* là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh: $a + ab + 2abc \leq \dfrac{9}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \dfrac{(x-y)^2}{4}$ ta có

$$b + 2abc = 2a.b\left(c + \frac{1}{2}\right) \leq 2a.\frac{\left(b + c + \frac{1}{2}\right)^2}{4} = 2a.\frac{\left(3 - a + \frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{a(7-2a)^2}{8}$$

Do đó, chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$a + \dfrac{a(7-2a)^2}{8} \leq \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow (4-a)(2a-3)^2 \geq 0$ (Luôn đúng với $0 \leq a \leq 3$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = \left(\dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$

Bài 4.50: Bình phương 2 vế ta được: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq ab + xy$ (*)

• Nếu $ab + xy < 0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

• Nếu $ab + xy \geq 0$ thì bình phương 2 vế ta được: (*) $\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0$ (đúng).

a) Sử dụng (1). Ta có: $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} \geq \sqrt{(1+1)^2 + (a+b)^2} = \sqrt{5}$.

b) Sử dụng (1). P ≥ $\sqrt{(a+b)^2 + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + \left(\dfrac{4}{a+b}\right)^2} = \sqrt{17}$

Chú ý: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ (với a, b > 0).

c) Áp dụng (1) liên tiếp hai lần ta được:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2} = \sqrt{82}\,.$$

Chú ý: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ (với x, y, z > 0).

d) Tương tự câu c). Ta có: P ≥ $\sqrt{\left(3\sqrt{223}\right)^2 + (x+y+z)^2} = \sqrt{2010}$.

Bài 4.51: a) Áp dụng (1) ba lần ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$; $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$; $\frac{1}{c}+\frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$.

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.
b) Tương tự câu a).

c) Áp dụng a) và b) ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 4\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)$.

d) Theo (1): $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b)$.

Cùng với các BĐT tương tự, cộng vế theo vế ta được đpcm.
e) Áp dụng câu d) với $a = x,\ b = 2y,\ c = 4z$ thì $a+b+c = 12 \Rightarrow$ đpcm.
f) Nhận xét: $(p-a) + (p-b) = 2p - (a+b) = c$.

Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 4.52: Ta có: (1) ⇔ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$. Dễ dàng suy từ BĐT Cô–si.

a) Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

$$\Rightarrow \text{VT} \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}.\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

Chú ý: $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.
b) Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

P = $\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{y+1-1}{y+1}+\frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$

Ta có: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{x+y+z+3} = \frac{9}{4}$. Suy ra: P ≤ $3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

c) Ta có: P ≥ $\frac{9}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 9$.

d) Ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1$$

và $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$ nên $\dfrac{2007}{ab+bc+ca}\ge\dfrac{3.2007}{(a+b+c)^2}\ge 669$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4.53: Ta có : $a^5+b^5\ge a^3b^2+b^3a^2=a^2b^2(a+b)\Rightarrow a^5+b^5+ab\ge ab\dfrac{a+b+c}{c}$

$$\Rightarrow\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{ab\dfrac{a+b+c}{c}}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Tương tự : $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\dfrac{a}{a+b+c}$; $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ac}\le\dfrac{b}{a+b+c}$

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm.

Bài 4.54: * Trước tiên, ta sẽ chứng minh kết quả sau: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ (1)

Nhân hai vế của (1) với $ab+bc+ca$, và để ý rằng

$$\frac{a}{b+c}.(ab+bc+ca)=\frac{a}{b+c}\left[a(b+c)+bc\right]=a^2+\frac{abc}{b+c}$$

Dễ thấy khi đó, (1) trở thành

$$a^2+\frac{abc}{b+c}+b^2+\frac{abc}{c+a}+c^2+\frac{abc}{a+b}\ge a^2+b^2+c^2$$

Hay $abc\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)\ge 0$ (hiển nhiên đúng). Điều phải chứng minh.

* Quay trở lại bài toán, sử dụng kết quả trên, ta suy ra

$$P\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}=t^2+\frac{4\sqrt{2}}{t},\text{ với } t=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$$

Với cách đặt trên, dễ dàng suy ra $t\ge 1$.

Vậy ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t)=t^2+\dfrac{4\sqrt{2}}{t}$ với $t\ge 1$.

Áp dụng BĐT côsi ta có $f(t)=t^2+\dfrac{2\sqrt{2}}{t}+\dfrac{2\sqrt{2}}{t}\ge 3\sqrt[3]{t^2.\dfrac{2\sqrt{2}}{t}.\dfrac{2\sqrt{2}}{t}}=6$

Đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{2}$ hay $a=b>0,\, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Vậy $\min P=6$ khi và chỉ khi $a=b>0,\, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.