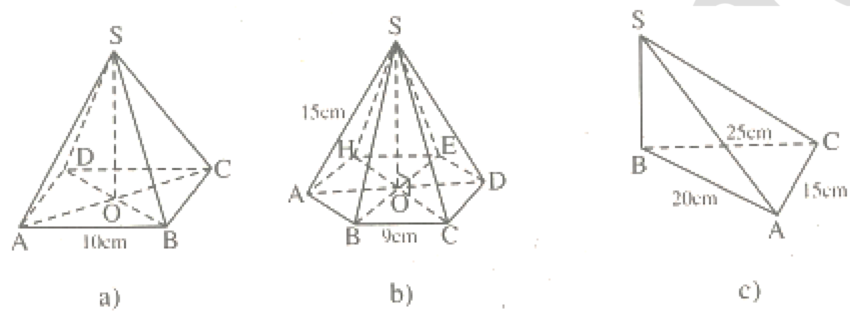
Chuyên đề 2
HÌNH CHÓP ĐỀU

4.1. (h.4.21a) ta có tam giác AOS vuông tại O $\left(\text{vì } SO \perp AC\right) \text{suy ra } SA^2 = SO^2 + OA^2$

$AC = AB\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{1}{2}AC = 5\sqrt{2}\,(cm)$

Vậy $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 50 \Rightarrow SO = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,(cm)$



Hình 4.21

4.2. (Hình 4.21b) Vì S.ABCDEH là hình chóp đều nên đáy là hình lục giác đều tâm O.
Tam giác AOB đều nên $AB = BO = OA = 9cm$
Tam giác SOA vuông tại O nên $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 144 \Rightarrow SO = 12\,(cm)$

4.3. (Hình 4.21c)

a) Ta có $SB \perp mp(ABC)$ mà $AC \subset mp(ABC)$, suy ra $SB \perp AC$

b) Vì $SB \perp AC, AB \perp AC$ nên $AC \perp mp(SAB) \Rightarrow AC \perp SA$

c) Áp dụng định lí Pytago ta có:

$SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 15cm; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 5\sqrt{38}\,(cm); BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2 = 25}\,(cm)$

4.4. $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}217^2.138 = 2166094\,(m^3)$

4.5. a)Ta có $SA \perp SC; SA \perp SB$ nên $SA \perp mp(SBC)$

b)Áp dụng định lí Pytago ta có :

$SB = \sqrt{AB^2 - SA^2} = \sqrt{5}; SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = \sqrt{12}\,(cm)$

$$S_{xq}=S_{SAC}+S_{SAB}+S_{SBC}=\frac{1}{2}(SA.SC+SA.SB+SB.SC)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{12}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}.\sqrt{12}\right)(cm)$$
c) $V=\frac{1}{3}S_{SBC}.SA=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(cm^3\right)$

4.6. theo đểa ta có $AB=BC=CD=DA=b; A'B'=B'C'=C'D'=D'A'=a$

$$OO'=MH=\frac{ab}{a+b}; HN=O'N-O'H=\frac{a-b}{2}$$

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông MHN ta có:

$$MN=\sqrt{MH^2+HN^2}=\sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4a^2b^2+a^4-2a^2b^2+b^2}{4(a+b)^2}}=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$$

$$S_{xq}=(p+p')d=(2a+2b).MN=a^2+b^2=S_{ABCD}+S_{A'B'C'D'}$$

Vậy diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.

4.7. a) $S_{\text{đáy lớn}}=\frac{20^2\sqrt{3}}{4}=100\sqrt{3}$

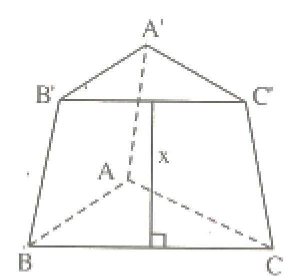
$S_{\text{đáy nhỏ}}=\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$

$S_{xq}=100\sqrt{3}+36\sqrt{3}=136\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

S_{tp} = Sxq+ $S_{\text{đáy lớn}}$+ $S_{\text{đáy nhỏ}}=2S_{xq}=272\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

b) $S_{tp}=2S_{xq}=2\frac{(20+12)x}{2}$ (voi x là chiều cao mặt bên)

$\Rightarrow 272\sqrt{3}=(20+12)x \Rightarrow x=\frac{272\sqrt{3}}{32}=\frac{17\sqrt{3}}{2}$



Hình 4.22

4.8. Vì ABCD;A'B'C'D' là các hình vuông nên $AC = 10\sqrt{2}, A'C' = 6\sqrt{2}$. Vẽ $C'M \perp AC$ thì $\Delta CC'M$ vuông cân tại M. vẽ $A'N \perp AC$ thì tam giác AA'M vuông cân tại M.

Ta có : $\Delta AA'N = \Delta CC'M$:

$$AN = CM = A'N = C'M = \frac{AC - MN}{2}$$

$$= \frac{AC - A'C'}{2} = 2\sqrt{2} => CC' = CM\sqrt{2} = 4$$

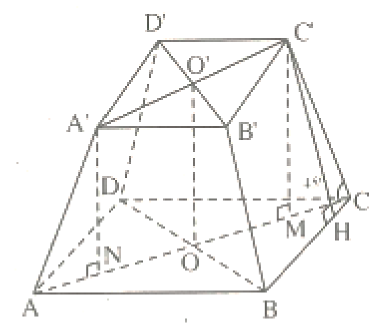
Vẽ đường cao CH của hình thang BB'C'C

Ta có $CH = \dfrac{BC - B'C'}{2} = 2(cm)$

Trong tam giác vuông CC'H có

$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{12}\,(cm)$$

Diện tích xung quanh hình chóp :



Hình 4.23

4.9. Gọi a là cạnh đáy hình chóp; h là chiều cao. Thể tích ban đầu của hình chóp là:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h$$

Gấp đôi cạnh đáy và giảm chiều cao đi một nửa thì thể tích hình chóp lúc sau là :

$$V_2 = \frac{1}{3}(2a)^2.\frac{h}{2} = \frac{1}{3}.4a^2.\frac{h}{2} = \frac{1}{3}.2a^2h = 2V_1$$

4.10. Vì các cạnh hình chóp đều bằng 1 trừ SA =x nên tứ giác ABCD là hình thoi(h. 4.24)

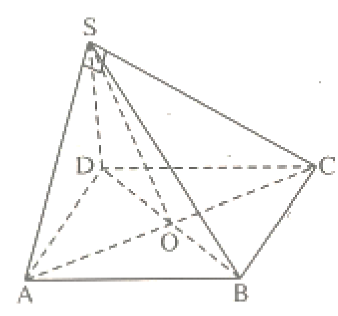
a) Ta có

$\Delta SBD = \Delta ABD = \Delta CBD(c.c.c) \Rightarrow SO = AO = CO$ (

O là giao điểm hai đường chéo đáy ABCD) hay

$$SO = \frac{AC}{2}$$

Vậy tam giác SAC vuông tại A (vì có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng .



Hình 4.24

b) Từ giả thiết suy ra ΔSBD cân tại
$SO \perp BD,$ mà $BD \perp AC(ABCD$ là hình thoi) nên
$OB \perp mp(SAC)$

Lại có: $V_{S.ABCD} = 2V_{B.SAC} = 2.\frac{1}{3}S_{ACS}.OB$

Trong đó $S_{ACS} = \frac{1}{2}SA.SC = \frac{x}{2}$

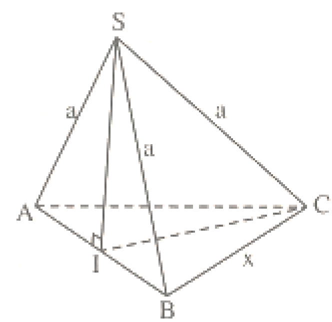
Mặt khác tam giác SAC vuông tại S nên : $AC^2 = SA^2 + SC^2 = x^2 + 1 \Rightarrow AC = \sqrt{x^2+1}$ và tam giác AOB vuông tại O nên : $OB^2 = ABH2 - OA^2 = 1 - \frac{x^2+1}{4} = \frac{3-x^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3-x^2}}{2}\right)^2$

Vậy $OB = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2} \Rightarrow V = V_{S.ABCD} = 2.\frac{1}{3}.\frac{x}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{3-x^2} = \frac{1}{6}x\sqrt{3-x^2}$

Ta có ; $x\sqrt{3-x^2} \le \frac{x^2+(3-x^2)}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow V \le \frac{1}{6}.\frac{3}{2} = \frac{1}{4}$. Vậy $\max V = \frac{1}{4}$

4.11. Gọi x là độ dài cạnh đáy hình chóp tam giác đều S.ABC, đường cao mặt bên là SI.

Ta có: $SI^2 = SA^2 - AI^2 = a^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow SI = \frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{2}$



Hình 4.25

Diện tích xung quanh hình chóp:

$S = 3S_{ABS} = 3AB.SI = \frac{3x}{2}.\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{2}$

có $x\sqrt{4a^2-x^2} \le \frac{x^2+(4a^2-x^2)}{2} = 2a^2$

Suy ra $S \le \frac{3}{4}.2a^2 = \frac{3}{2}.a^2$

(dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$

4.24.a) ΔABC đều, nên đường trung tuyến AI cũng là đường cao $\Rightarrow AI \perp BC$.
Mặt khác $SA \perp BC\left(\text{vì } SA \perp mp(ABC)\right) \Rightarrow BC \perp mp(SAI) \Rightarrow mp(ABC) \perp mp(SAI)$

b)Gọi H là trực tâm tam giác SBC. Trong mp(SAI), từ H dựng đường thẳng $d \perp SI$. Đường thẳng d cắt AI tại G

do $BC \perp mp(SAI)$ nên $BC \perp d$. Từ đó : $d \perp mp(SBC) \Rightarrow d \perp SB$

Mặt khác : $CH \perp SB$ (H là trực tâm tam giác SBC)

Do đó $SB \perp CG$

Lại có $SA \perp CG$ (vì $SA \perp mp(ABC)$) có chứa CG)

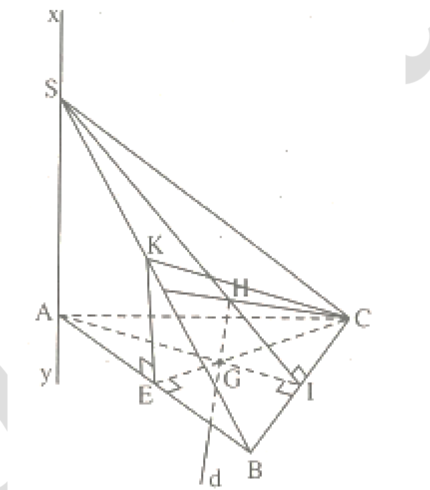
$\Rightarrow CG \perp mp(SAB) \Rightarrow CG \perp AB$. Kết hợp $AG \perp BC$ ta có G là trực tâm tam giác ABC.

c)Gọi E là trung điểm của AB.Khi đó KE là đường trung bình của tam giác SAB nên $KE \parallel SA$.

Trong mp(SAB) có : $SA \perp AB$ nên $KE \perp AB$

Lại có $CE \perp AB \Rightarrow AB \perp mp(CKE)$

Vậy CK luôn nằm trong mặt pẳng cố định vuông góc với AB tại trung điểm của AB.



Hình 4.26

4.25.Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, AH cắt BC tại M $\Rightarrow MB = MC = \frac{3}{2}a\left(h.4.27\right)$

ΔMAB vuông tại M nên

$$AM^2 = AB^2 - MB^2 = 9a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{27a^2}{4}$$

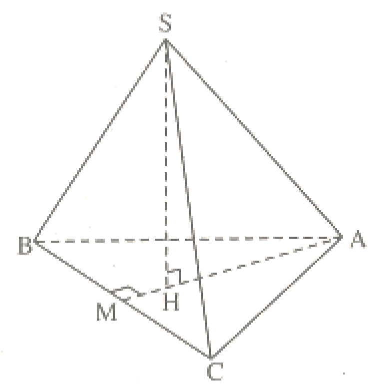
Suy ra

$$AM = \frac{\sqrt{27a^2}}{2}; AH = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{27a^2}}{2}.\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{27a^2}}{3}$$

ΔSAH vuông tại H nên

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 4a^2 - \frac{27a^2}{9} = a^2$$

Vậy AH = a



Hình 4.27