Đáp án chuyên đề:

Một số phương trình quy về bậc nhất hoặc bậc hai

Đại số 10

Bài 3.24: a) Ta có: $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 \text{ khi } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x+2 \text{ khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}$

* Nếu $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow PT \Leftrightarrow 3x-2 = x^2+2x+3 \Leftrightarrow x^2-x+5=0$ pt vô nghiệm .

* Nếu $x < \frac{2}{3} \Rightarrow PT \Leftrightarrow -3x+2 = x^2+2x+3 \Leftrightarrow x^2+5x+1=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ hai nghiệm này đều thỏa mãn $x < \frac{2}{3}$.

Vậy nghiệm của pt đã cho là $x = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

b) $x=1,\ x=-1\pm\sqrt{2}$

Bài 3.25: a) Đặt $t = |2x-1|, t \geq 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (l) \\ t = 4 \end{array}\right.$

Với $t = 4$ ta có $|2x-1| = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ hoặc $x = -\frac{3}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$ và $x = \frac{5}{2}$

b) ĐKXĐ: $x \neq 0$. Đặt $t = \left|\frac{x^2-2}{x}\right|, t \geq 0$

Phương trình trở thành $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 2$ ta có $\left|\frac{x^2-2}{x}\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\pm\sqrt{3} \\ x = 1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1\pm\sqrt{3}$ và $x = 1\pm\sqrt{3}$.

Bài 3.26: Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)^2 - 2|x-1| + m + 2 = 0$

Đặt $t = |x-1|, t \geq 0$ ta có phương trình: $t^2 - 2t + m + 2 = 0$ (1)

a) Khi $m = -2$ ta có $t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm phương trình là $x = 1, x = 3,\ x = -1$

b) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t \geq 0$

$\Leftrightarrow m = -t^2 + 2t - 2$ có nghiệm $t \geq 0 \Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 + 2t - 2$ với $t \in [0; +\infty)$ cắt trục hoành. $\Leftrightarrow m \leq -2$.

Bài 2.37: a) Ta có $PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2m = x + 1 \\ mx + 2m = -\ \ x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1\ \ x = 1 - 2m \quad 1 \\ m + 1\ \ x = -2m - 1 \quad 2 \end{array}\right.$

Giải (1): Với $m = 1$ phương trình trở thành $0x = -1$ phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 1$ phương trình tương đương với $x = \dfrac{1 - 2m}{m - 1}$

Giải (2): Với $m = -1$ phương trình trở thành $0x = 1$ phương trình vô nghiệm

Với $m \neq -1$ phương trình tương đương với $x = \dfrac{-2m - 1}{m + 1}$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{-3}{2}$

Với $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1 - 2m}{m - 1}$ và $x = \dfrac{-2m - 1}{m + 1}$

b) Ta có $|mx + 2x| = |mx - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2x = mx - 1 \\ mx + 2x = -\ \ mx - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ (2m + 2)x = 1 \quad (*) \end{array}\right.$

Với phương trình (*) ta có

$m = -1$ thì phương trình (*) vô nghiệm

$m \neq -1$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = \dfrac{1}{2m + 2}$

Kết luận: $m = -1$ phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$

$m \neq -1$ phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$ và $x = \dfrac{1}{2m + 2}$.

Bài 3.28: a) *ĐKXĐ:* $x \neq \pm 3; x \neq -\dfrac{7}{2}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{13}{x - 3\quad 2x + 7} + \frac{1}{2x + 7} = \frac{6}{x - 3\quad x + 3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \ \ x - 3\ \ \ x + 4\ \ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -4$.

b) $x=1,\ x=5$

c) Điều kiện: $x \notin \quad -3;-2;1;4$

$$PT \Leftrightarrow 1+\frac{2}{x-1}+1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3}+1+\frac{8}{x-4}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-8}{(x-1)(x-4)}-\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{16}{5}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$$

Đối chiếu với điều kiện phương trình có nghiệm là $x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$.

Bài 3.29: a) Điều kiện: $x \notin \left\{1;\frac{2}{3}\right\}$

Với $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x \neq 0$ ta có $PT \Leftrightarrow \dfrac{2}{3x-5+\frac{2}{x}}+\dfrac{13}{3x+1+\frac{2}{x}}=6$

Đặt $t=3x+\dfrac{2}{x}$ phương trình trở thành $PT \Leftrightarrow \dfrac{2}{t-5}+\dfrac{13}{t+1}=6$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{2};x=\dfrac{4}{3}$.

b) Điều kiện: $x \notin \left\{0;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{\frac{x^4+3x^2+1}{x^2}}{\frac{x^3+x^2-x}{x^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{x^2+\frac{1}{x^2}+3}{x-\frac{1}{x}+1}=3$$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$ phương trình trở thành $\dfrac{t^2+5}{t+1}=3$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};x=1\pm\sqrt{2}$.

c) Điều kiện: $x\neq -1;x\neq 0$

$$PT \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+\frac{2}{x\ \ x+1}=15 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}-15=0$$

Đặt $\dfrac{1}{x(x+1)}=t$ ta được phương trình $t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow t=3;t=-5$

$+) t = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$

$+) t = -5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = -5 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

Đối chiếu với điều kiện (*) thì phương trình có bốn nghiệm $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}; x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

Bài 3.30: a) Điều kiện: $x \neq 2; x \neq 3$

Đặt $u = \dfrac{x+1}{x-2}; v = \dfrac{x-2}{x-3}$ ta được

$u^2 + uv = 12v^2 \Leftrightarrow (u-3v)(u+4v) = 0 \Leftrightarrow u = 3v; u = -4v$

+)

$u = 3v \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2} = 3\dfrac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 3x^2 - 12x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$

+)

$u = -4v \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2} = -4\dfrac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = -4x^2 + 16x - 16 \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 19 = 0 \Leftrightarrow \nexists x$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$.

b) ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq \dfrac{-1}{3}$

Đặt $u = 3x^2 + x,\ v = x + 1, u \neq 0, v \neq 0$

Khi đó phương trình trở thành $\dfrac{2u}{v} + \dfrac{13u}{v+6u} = 6 \Leftrightarrow 4u^2 - 7uv - 2v^2 = 0$

$\Leftrightarrow (4u+v)(u-2v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4u = -v \\ u = 2v \end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được nghiệm của pt là $x \in \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{3}\right\}$

Bài 3.31: ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$PT \Leftrightarrow \ ax - 1 \quad x + 1 \ + 2 \ x - 1 \ = a \ x^2 + 1$

$\Leftrightarrow ax^2 + ax - x - 1 + 2x - 2 = ax^2 + a \Leftrightarrow \ a + 1 \ x = a + 3$

- Nếu $a \neq -1$ thì $x = \dfrac{a+3}{a+1}$. Ta có $\dfrac{a+3}{a+1} \neq 1$, xét $\dfrac{a+3}{a+1} \neq -1 \Leftrightarrow a \neq -2$
- Nếu $a = -1$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy: -Với $a \neq -1$ và $a \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a+3}{a+1}$

-Với $a = -1$ hoặc $a = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.32: Điều kiện: $x \neq a, x \neq b$:

Ta có: PT $\Leftrightarrow 2(x-a)(x-b)=a(x-a)+b(x-b)$

$\Leftrightarrow 2x^2-3(a+b)x+a^2+b^2+2ab=0 \Leftrightarrow 2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2=0$

Phương trình có hai nghiệm là $x_1=a+b$ và $x_2=\dfrac{a+b}{2}$

Ta có $x_1 \ne a \Leftrightarrow b\ne 0$, $x_1\ne b \Leftrightarrow a\ne 0$, $x_2\ne a \Leftrightarrow x_2\ne b \Leftrightarrow a\ne b$

$x_1\ne x_2 \Leftrightarrow a+b\ne \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow a\ne -b$

Vậy với $a\ne \pm b; a\ne 0, b\ne 0$ thì pt có hai nghiệm phân biệt

Bài 3.33: a) $Pt \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 2x+1=(3x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3} \\ 9x^2+4x=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3} \\ x=0,\ x=-\dfrac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

b) $PT \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^3-5x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$

c) $PT \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-x^2-1\ge 0 \\ x^4+3x+1=x^4-x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-x^2-1\ge 0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

d) $Pt \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 2x+\sqrt{6x^2+1}=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \sqrt{6x^2+1}=x^2+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 6x^2+1=(x^2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^4-4x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=2$

e) $\left(1+\sqrt{3+x}\right)^2=9x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}+1=3x \\ \sqrt{x+3}+1=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18} \end{array}\right.$

f) $x^2-(x+7)+(x+\sqrt{x+7})=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x+7})(x-\sqrt{x+7}+1)=0$

Từ đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2; x=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.

Bài 3.34: a) ĐKXĐ: $x\ge \dfrac{5}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3\ \ x-2\ \ +\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0(*) \end{array}\right.$$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} \Rightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<0$ nên pt (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất *x = 2*.

b) Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm 1$, và ta viết lại phương trình như sau:

$$PT \Leftrightarrow 3\ \sqrt[3]{x^2}-1\ +\ \sqrt{x^2+8}-3\ =\ \sqrt{x^2+15}-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\ \ x^2-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} \end{array}\right.$$

Mặt khác, ta có:

$$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8} \Rightarrow \sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

Nên phương trình thức hai vô nghiệm.

Vậy pt có 2 nghiệm $x=1, x=-1$.

c) ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{1}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{5x-1}-2+\sqrt[3]{9-x}-2=2x^2+3x-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\ \ x-1}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1-x}{\sqrt[3]{9-x}\ ^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}=\ x-1\ \ 2x+5$$

$$\Leftrightarrow \quad x-1\left[2x+5-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{9-x}\ ^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x-1\left[2x+\frac{5\sqrt{5x-1}+5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{9-x}\ ^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}\right]=0$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=1$.

d) ĐKXĐ: $x \geq 1$

$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}+x^2-7=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6}-2)+(\sqrt{x-1}-1)+(x^2-4)=0 \quad (1)$

Ta có

$\forall x \geq 1: \sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4=(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3>0 \ \ \& \sqrt{x-1}+1>0$

Do đó $PT \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2\right]=0 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 3.35: a) Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2},\ (\ t\geq 0) \Rightarrow x^2+x=t^2-2$

Phương trình trở thành: $t=t^2-2 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(l) \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có: $2=\sqrt{x^2+x+2},\ (\ t\geq 0) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

b) Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1},\ (\ t\geq 0) \Rightarrow x^2-x=t^2-1$

Phương trình trở thành: $4\ \ t^2-1\ \ +1=t \Leftrightarrow 4t^2-t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=0,\ x=1$

c) Điều kiện $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$. Đặt $t=\sqrt{x+3}, t\geq 0 \Rightarrow x=t^2-3$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

$13(t^2-3)+2\ \left[3(t^2-3)+2\right]t+42=0 \Leftrightarrow 6t^3+13t^2-14t+3=0$

$\Leftrightarrow (t+3)(6t^2-5t+1)=0 \Leftrightarrow 6t^2-5t+1=0,(t\geq 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Từ đó $x=-\dfrac{11}{4}; x=-\dfrac{26}{9}$.

d) Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+24},\ (\ t\geq 0)$

$\Rightarrow -x^2+2x+24=t^2 \Rightarrow x^2-2x-22=2-t^2$

Phương trình trở thành: $2-t^2-t=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2(l) \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có: $\sqrt{-x^2+2x+24}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-23=0 \Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{6}$

e) ĐKXĐ: $-1\leq x\leq 3, x\neq 1$.

PT $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\ \ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\ \ =\ \ 2x-1\ \ \ 2x-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} = 2\ \ x^2-2x\ \ .$

f) Đặt $t=\sqrt{4x-1}$, ta có $t^4-4t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1)=0$

ĐS: $x=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

g) Điều kiện: $-1 \le x < 0$

Chia cả hai vế cho x ta nhận được: $x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3+\dfrac{1}{x}$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$, ta được $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

h) $x=0$ không phải là nghiệm , Chia cả hai vế cho x ta được: $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}=2$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}$, Ta có : $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 3.36: a) $PT \Leftrightarrow -\ \ 3x-2\ \ +\sqrt{3x-2}+4x^2-18x+20=0$

Đặt $t=\sqrt{3x-2},\ t\ge 0$.

Phương trình trở thành $-t^2+t+4x^2-18x+20=0$, có $\Delta_t\ =\ \ 4x-9\ \ ^2$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\dfrac{19+\sqrt{73}}{8},\ x=\dfrac{23-\sqrt{97}}{8}$

b) $PT \Leftrightarrow 2\ \ x+3\ \ +5x\sqrt{x+3}+3x^2-3x-18=0$

Đặt $t=\sqrt{x+3},\ t\ge 0$.

Phương trình trở thành $2t^2+5xt+3x^2-3x-18=0$

Có $\Delta_t\ =\ \ x+12\ \ ^2$. Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=1,\ x=-\dfrac{16+2\sqrt{10}}{9}$

c) $PT \Leftrightarrow -27\ \ x-2\ \ -51\sqrt{x-2}+3x^2-31x+56=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2},\ t\ge 0$.

Phương trình trở thành $-27t^2-51t+3x^2-31x+56=0$

Có $\Delta_t=(18x-93)^2$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\dfrac{25+3\sqrt{33}}{2},\ x=\dfrac{41-3\sqrt{93}}{6}$

d) $PT \Leftrightarrow -2(3x-1)+x\sqrt{3x-1}+x^2=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3x-1})(2\sqrt{3x-1}+x)=0$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3.37: • Với $x > 3$: Đặt $a = \sqrt{x+3}; b = \sqrt{x-3};\ a > 0, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2x \\ a^2 - b^2 = 6 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$$a^2 + b^2 + 2ab = \frac{4a^2}{b^4} \Leftrightarrow a + b = 2\frac{a}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \ \ a+b \ \ \ a-b \ \ = \frac{2a \ \ a-b}{b^2} \Leftrightarrow 6b^2 = 2a \ \ a-b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} b$$

Do $a > 0, b > 0 \Rightarrow a = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} b$

Suy ra $\sqrt{x+3} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = 8 - \sqrt{13}$ (thỏa mãn).

- Với $x \le -3$ tương tự ta có phương trình vô nghiệm.
- Với $-3 < x \le 3$ khi đó phương trình không xác định nên nó vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 8 - \sqrt{13}$.

Bài 3.38: Xét phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} = -x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x^2 - x + 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Suy ra $\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2 \ne 0$ do đó

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} - \ \ x + 2 \ = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2} - \ \ x + 2$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2} = \frac{-5x - 3}{x^2 + 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 3 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2 = x^2 + 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - x \ (**) \end{cases}$$

Ta có (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge 0 \\ x^2 - x + 1 = \left(x^2 - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x \in \left\{ -\dfrac{3}{5}; \dfrac{1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2} \right\}$

Bài 3.39: a) $PT \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(x+2)(x+2) = 0$

b) $PT \Leftrightarrow (x-2)(2x-3)(x+2)(x+1)(2x-1) = 0$

c) $PT \Leftrightarrow (x^2+1)(x-2)(x+3) = 0$

d) $PT \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2+2)(x-2) = 0$

Bài 3.40: a) $(x^2-x+1)^2-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt[4]{12}+\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt[4]{12}+\sqrt{3}}{2}$

b) $PT \Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3.41: $PT \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2mx+m^2-m+1\right)=0$

Từ đó suy ra $2\neq m>1$.

Bài 3.42: a) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x\neq 0$ ta có $PT \Leftrightarrow 2x^2+3x-16+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-16=0$

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$ thì $y^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

Phương trình trở thành: $2\left(y^2-2\right)+3y-16=0 \Leftrightarrow 2y^2+3y-20=0$

Phương trình này có nghiệm là $y_1=-4, y_2=\dfrac{5}{2}$

Vì vậy $x+\dfrac{1}{x}=-4$ và $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ tức là $x^2+4x+1=0$ và $2x^2-5x+2=0$

Từ đó ta tìm được các nghiệm là: $x=-2\pm\sqrt{3}, x=\dfrac{1}{2}, x=2$.

a) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình . Chia hai vế của phương trình cho x^3, ta được: $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3(x^2+\dfrac{1}{x^2})-6(x+\dfrac{1}{x})-21=0$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $|t|\geq 2$. Ta có : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2;\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=t(t^2-3)$.

Nên phương trình trở thành : $t(t^2-3)+3(t^2-2)-6t-21=0$

$\Leftrightarrow t^3+3t^2-9t-27=0 \Leftrightarrow (t+3)^2(t-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

* $t=3 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

* $t=-3 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2};\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) . Đặt $x=t+1$, ta có: $\ t+4\ ^4+\ t-4\ ^4=1312$

$\Leftrightarrow t^4+96t^2-400=0 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2$

Suy ra $x=3, x=-1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên

Phương trình $\Leftrightarrow\ \ 32x^2+52x+15\ \ \ 32x^2-46x+15\ \ -99x^2=0$

$\Leftrightarrow \left(36x+52+\dfrac{15}{x}\right)\left(32x-46+\dfrac{15}{x}\right)-99=0$.

Đặt $t=32x+\dfrac{15}{x}$.Ta có:

$t+52 \quad t-46 \quad -99=0 \Leftrightarrow t^2+6t-2491=0 \Leftrightarrow t=47, t=-53$

• $t=47 \Leftrightarrow 32x^2-47x+15=0 \Leftrightarrow x=1, x=\dfrac{15}{32}$

• $t=-53 \Leftrightarrow 32x^2-53x+15=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{53\pm\sqrt{889}}{64}$.

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là: $\left\{1, \dfrac{15}{32}, \dfrac{53\pm\sqrt{889}}{64}\right\}$.

d) Phương trình $\Leftrightarrow \quad x^2-m \quad ^2 + \quad 2m-9 \quad x^2-2x+15-m^2 \quad =0$

Ta chọn m sao cho $\Delta'=1- \quad 15-m^2 \quad 2m-9 \quad =0$ ta tìm được $m=4$

Nên ta có: $\quad x^2-4 \quad ^2 - \quad x-1 \quad ^2 =0 \Leftrightarrow \quad x^2+x-5 \quad x^2-x-3 \quad =0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-5=0 \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}; \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

e) Ta thấy $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho x^3+1 ta được: $2\dfrac{x^2-x+1}{x+1}+5\dfrac{x+1}{x^2-x+1}=11$.

Đặt $t=\dfrac{x^2-x+1}{x+1} \Rightarrow 2t+\dfrac{5}{t}=11 \Leftrightarrow 2t^2-11t+5=0 \Leftrightarrow t=5, t=\dfrac{1}{2}$.

• $t=5 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x+1}=5 \Leftrightarrow x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}$

• $t=5 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x+1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=1, x=\dfrac{1}{2}$.

Bài 3.43: Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)(x+5)(x+1)(x+3)=m$

$\Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=m$

Đặt $t=x^2+4x=(x+2)^2-4\geq -4$,ta có phương trình :

$\Leftrightarrow (t-5)(t+3)=m \Leftrightarrow t^2-2t-15=m \quad (2)$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq -4$.

Với $t \geq -4 \Rightarrow t^2 - 2t - 15 = (t-1)^2 - 16 \geq -16 \Rightarrow$(2) có nghiệm $t \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -16$.

Bài 3.44: Phương trình $\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) = m$

Đặt $t = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$. Phương trình trở thành: $t^2 - 2t = m$ **(*)**.

Phương trình có bốn nghiệm phương trình $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t > -1$.

Xét hàm số : $f(t) = t^2 - 2t$ với $t \geq -1$, ta có bảng biến thiên:

t	-1	1	$+\infty$
$f(t) = t^2 - 2t$	3 $\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow -1 < m < 3$.