

Chuyên đề nâng cao 1

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giá trị tuyệt đối

Với $a \in \mathbb{R}$, ta có $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

a) định nghĩa : nhị thức bậc nhất của x là biểu thức có dạng $f(x) = ax + b$, trong đó a, b là các số

cho trước và $a \neq 0$.

Số $x_0 = -\frac{b}{a}$ thỏa mãn $f(x_0) = 0$, gọi là nghiệm của nhị thức bậc nhất $f(x)$

b) Quy tắc dấu: Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ cùng dấu với a khi $x > x_0$, và trái dấu với a khi $x < x_0$ cụ thể:

❖ Nếu $a > 0$ thì $f(x) > 0, \forall x > x_0$ và $f(x) < 0, \forall x < x_0$

x	$x_0 = -\frac{b}{a}$
$f(x) = ax + b$	❖ 0 +

❖ Nếu $a < 0$ thì $f(x) < 0, \forall x > x_0$ và $f(x) > 0, \forall x < x_0$

x	$x_0 = -\frac{b}{a}$
$f(x) = ax + b$	+ 0 -

*Quy tắc ở trên có nội dung thường được nhớ là “ phải cùng, trái khác” tức là bên phải nghiệm x_0 thì $f(x)$ cùng dấu với a , bên trái nghiệm x_0 thì $f(x)$ khác dấu với a .

B. CÁC DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG.

Dạng 1. $|P(x)| = k$ trong đó $P(x)$ là biểu thức của x , k là một số cho trước)

❖ Phương pháp giải

- ❖ Nếu $k < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- ❖ Nếu $k = 0$ thì ta có $|P(x)| = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$
- ❖ Nếu $k > 0$ thì ta có $|P(x) = k| \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = k \\ P(x) = -k \end{cases}$

Ví dụ 15. Giải phương trình $\frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3 &\Leftrightarrow 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{15}{4} - 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2} : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{10}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \pm \frac{10}{3} \end{aligned}$$

- ❖ Trường hợp 1: $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{17}{6} \Leftrightarrow x = \frac{34}{9}$
- ❖ Trường hợp 2: $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = -\frac{23}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{46}{9}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{46}{9}; \frac{34}{9} \right\}$

Ví dụ 16. Tìm m để phương trình $|2 - 3x| - 1 = 2m - 7$ có nghiệm duy nhất.

Giải

$$\text{Ta có } |2 - 3x| - 1 = 2m - 7 \Leftrightarrow |2 - 3x| = 2m - 6$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy điều kiện của m là $m = 3$ (khi đó nghiệm duy nhất của phương trình là $x = \frac{2}{3}$)

2. Dạng 2 $|A(x)| = |B(x)|$

❖ Cách giải

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$$

Ví dụ 17. Giải phương trình. $\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0$

Giải

Ta có $\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| \Leftrightarrow \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = \pm \left(\frac{1}{2}x + 5 \right)$

❖ Trường hợp 1 : $\frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x = \frac{25}{6} \Leftrightarrow x = \frac{100}{9}$

❖ Trường hợp 2 : $\frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}x - 5 \Leftrightarrow \frac{11}{8}x = \frac{-35}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{140}{33}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{140}{33}; \frac{100}{9} \right\}$

3. Dạng 3: $|A(x)| = B(x)$

❖ **Cách 1:** mọi x mà $B(x) < 0$ đều không thỏa mãn phương trình nên ta có cách giải sau :

Xét phương trình $|A(x)| = B(x)$ (1)

Điều kiện $B(x) \geq 0$ (*)

Khi đó (1) trở thành $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$

Giải các phương trình và kiểm tra điều kiện (*)

❖ **Cách 2.** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách chia khoảng giá trị

❖ Nếu $A(x) \geq 0$ thì (1) trở thành $A(x) = B(x)$

Giải phương trình và kiểm tra điều kiện $A(x) \geq 0$

❖ Nếu $A(x) < 0$ thì (1) trở thành $-A(x) = B(x)$

Giải phương trình và kiểm tra điều kiện $A(x) < 0$

Ví dụ 18. Giải phương trình $|2x - 6| = x + 1$ (1)

Giải

Cách 1:

Điều kiện $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2x-6 = \pm(x+1)$

- ❖ Trường hợp 1: $2x-6 = x+1 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa mãn $x \geq -1$)
- ❖ Trường hợp 2 : $2x-6 = -x-1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn $x \geq -1$)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{7; \frac{5}{3}\right\}$

Cách 2:

Ta có $|2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -2x+6 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$

- ❖ Trường hợp 1: Nếu $x \geq 3$ thì phương trình (1) trở thành:
 $2x-6 = x+1 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 3$)
- ❖ Trường hợp 1: Nếu $x < 3$ thì phương trình (1) trở thành:
 $-2x+6 = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn điều kiện $x < 3$)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{7; \frac{5}{3}\right\}$

4. Dạng 4 : Phương trình chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối

$$|A(x)| + B(x) = C(x)$$

❖ Cách giải

- Lập bảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- Căn cứ bảng xét dấu, chia từng khoảng để giải phương trình (kiểm tra điều kiện tương ứng)

Ví dụ 19. Giải phương trình : $|x+1| + |x-3| = 2x-1$ (2)

Giải

Ta có $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$ và $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$

Từ đó ta có bảng sau :

x	-1	3
---	----	---

$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	$x+1$	
$ x-3 $	$-x+3$		$-x+3$	0	$x-3$

+ Trường hợp 1 : Nếu $x < -1$ thì phương trình (2) trở thành :

$$-x-1-x+3=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4} \text{ (không thỏa mãn } x < -1)$$

+ Trường hợp 2 : Nếu $-1 \leq x \leq 3$ thì phương trình (2) trở thành :

$$x+1-x+3=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn } -1 \leq x \leq 3)$$

+ trường hợp 3: Nếu $x > 3$ thì phương trình (2) trở thành :

$$x+1+x-3=2x-1 \Leftrightarrow 0x=1 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{5}{2}$

Ví dụ 20 Giải phương trình :

$$\left|x + \frac{1}{1.3}\right| + \left|x + \frac{1}{3.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.7}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{197.99}\right| = 50x$$

Giải

Nhận thấy vế trái không âm với mọi x , nên điều kiện cần để x là nghiệm của phương trình là vế phải không âm, tức là $5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Khi đó các biểu thức trong tất cả các dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái đều dương. Vì vậy phương trình trở thành:

$$\left(x + \frac{1}{1.3}\right) + \left(x + \frac{1}{3.5}\right) + \left(x + \frac{1}{5.7}\right) + \dots + \left(x + \frac{1}{97.99}\right) = 50x$$

$$\Leftrightarrow 49x + \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{97.99}\right) = 50x$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{97.99}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{49}{99} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 0)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{49}{99}$

5. Dạng 5: $|A(x)| + |B(x)| = |A(x) + B(x)|$

❖ Cách giải

Vì $|A(x) + B(x)| \leq |A(x)| + |B(x)|$ nên phương trình tương đương với điều kiện xảy ra đẳng thức: $A(x) \cdot B(x) \geq 0$

Ví dụ 21. Giải phương trình sau: $|5x + 1| + |3 - 2x| = |4 + 3x|$

Giải

Ta có $|4 + 3x| = |5x + 1| + |3 - 2x| \leq |5x + 1| + |3 - 2x|, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $|5x + 1| + |3 - 2x| = |4 + 3x| \Leftrightarrow (5x + 1)(3 - 2x) \geq 0$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$
$5x + 1$	-	+
$3 - 2x$	+	-
$(5x + 1)(3 - 2x)$	-	-

Từ bảng xét dấu, ta có : $(5x+1)(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là : $S = \left\{ x \in R \mid -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$ (hay gọn hơn là

$$S = \left[-\frac{1}{5}; \frac{3}{2} \right])$$

Ví dụ 22. Giải bất phương trình:

$$|x+3| + |3x-1| + |2x-1| = 3$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } |x+3| + |3x-1| + |2x-1| &= |x+3| + |-3x+1| + |2x-1| \\ &\geq |x+3+(-3x+1)| + |2x-1| = |-2x+4| + |2x-1| \\ &\geq |(-2x+4)+(2x-1)| = 3, \forall x \in R \end{aligned}$$

Do đó phương trình tương đương với điều kiện xảy ra đẳng thức :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x+3)(-3x+1) \geq 0 \\ (-2x+4)(2x-1) \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+9)(3x-1) \leq 0 \\ (2x-4)(2x-1) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 \geq 0 \geq 3x-1 \\ 2x-4 \leq 0 \leq 2x-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 \geq 0 \\ 3x-1 \leq 0 \\ 2x-4 \leq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq \frac{1}{3} \\ x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{không có } x \text{ thỏa mãn.} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

C.BÀI TẬP

Giải các phương trình sau (4.32 – 4.40):

4.31 a) $|2x-5| = 4$

b) $\frac{3}{4} - |2x+1| = \frac{7}{8}$

4.32. a) $6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2$

$$b) \frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} = \frac{7}{2} \right|$$

$$4.33 \quad a) |2x-3| - |3x+2| = 0$$

$$b) |7x+1| - |5x+6| = 0$$

$$4.34. \quad a) \left| \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| = |4x-1|$$

$$b) \left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| - \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right| = 0$$

$$4.35. \quad a) \left| \frac{1}{2}x \right| = 3 - 2x$$

$$b) |5x| = x - 12$$

$$4.36. \quad a) |2x-5| = x+1$$

$$b) |7-2x| + 7 = 2x$$

$$4.37. \quad a) |x+5| - |1-2x| = x$$

$$b) |x-2| + |x-3| + |x-4| = 2$$

$$4.38 \quad a) 4|3x-1| + |x| + 2|x-5| + 7|x-3| = 12$$

$$b) 3|x+4| - |2x+1| - 5|x+3| + |x-9| = 5$$

$$4.39. \quad a) \left| x + \frac{1}{1.2} \right| + \left| x + \frac{1}{2.3} \right| + \left| x + \frac{1}{3.4} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{99.100} \right| = 100x$$

$$b) \left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| = 101x$$

$$4.40 \quad a) \left| 2x-1 \right| + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$$

$$b) \left| x^2 + 2 \right| \left| x - \frac{1}{2} \right| = x^2 + 2$$

4.41 Tìm x,y thỏa mãn

$$a) |3 - 2x| + |4y + 5| = 0$$

$$b) |x - y| + \left| y + \frac{9}{25} \right| \leq 0$$

4.42. Tìm x, y thỏa mãn

$$a) (x + y)^{2012} + 2013|y - 1| = 0$$

$$b) 2(x - 5)^4 + 5|2y - 7|^5 = 0$$

4.43. Giải các phương trình sau:

$$a) |x + 5| + |3 - x| = 8$$

$$b) 2|x - 3| + |2x + 5| = 11$$

4.44. Giải các phương trình sau:

$$a) |x + 1| + |2x - 3| = |3x - 2|$$

$$b) |5 - x| + 3|x - 3| = 2$$