Chuyên đề nâng cao 2
BẤT ĐẲNG THỨC
VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

A.MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP

1. phương pháp biến đổi tương đương

Nội dung của phương pháp này là dùng các phép biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đã được khẳng định là đúng.

Ví dụ 23. Chứng minh rằng với mọi a, b,c ta có :

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \qquad (1)$$

Giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi a, b, c nên bất đẳng thức (1) đúng với mọi a, b, c

Đẳng thức xảy ra khi $a-b=b-c=c-a=0 \; hay \; a=b=c$

Ví dụ 24. Cho m,n > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n} \qquad (2)$$

Giải

Ta có $(2) \Leftrightarrow n(m+n)a^2+m(m+n)b^2 \geq mn(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow mna^2+n^2a^2+m^2b^2+mnb^2 \geq mna^2+2mnab+mnb^2$$

$$\Leftrightarrow n^2a^2-2mnab+m^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (na-mb)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức (2) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $na-mb=0 \; hay \; \frac{a}{m}=\frac{b}{n}$

Chú ý

Bất đẳng thức (2) là một dạng đặc biệt của bất đẳng thức Schwarz sau đây :

Với mọi $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, ta có :

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n}$

2. Phương pháp phản chứng

Nội dung của phương pháp là: Để chứng minh một khẳng định là đúng ta giả sử ngược lại khẳng định đó sai. Sau đó bằng suy luận và các kết quả đã biết ta đưa đến một điều mâu thuẫn. Để không xảy ra điều mâu thuẫn này thì điều giả sử là sai, tức là khẳng định ban đầu là đúng.

Ví dụ 25 Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 < 1$

(Đề thi vào 10 chuyên Chu Văn An và Hà Nội – Amsterdam,1994)

Giải

Từ giả thiết ta có $x > y > 0$

Giả sử $x^2 + y^2 \geq 1, ta\, có: x^3 + y^3 = x - y \leq (x - y)(x^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \leq x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - x^2y - 2y^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(y - x) + (-2y^3) \geq 0\, vô\, lí,\, vì\, y - x < 0\, và - 2y^3 < 0$$

Điều vô lí này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai.

Vậy $x^2 + y^2 < 1$

Ví dụ 26. Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 & (1) \\ -1 \leq x + y + xy \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $|x| \leq 2, |y| \leq 2$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 2000)

Giải

Vì vai trò của x và y là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $|x| \le 2$, việc chứng minh $|y| \le 2$ được thực hiện tương tự.

Giả sử phản chứng rằng $|x| > 2$, ta có:

- Nếu x > 2 thì từ (1)ta có : $y \le 1 - x < -1 \Rightarrow xy < -2$
- Nếu x < -2 thì từ (1)ta có : $y \le -1 - x > 1 \Rightarrow xy < -2$

Do vậy nếu $|x| > 2$ thì $xy < -2$ mặt khác , $x + y \le 1$ nên suy ra $x + y + xy < -1$: mâu thuẫn với (2)

Mâu thuẫn đó chứng tỏ điều giả sử là sai, tức là phải có $|x| \le 2$ (đpcm)

3. Sử dụng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

Cơ sở của phương pháp này là hai bất đẳng thức sau :

i) $|x| \ge 0, \forall x \text{ và } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $|x+y| \le |x| + |y|, \forall x, y \text{ và } |x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \ge 0$

Ví dụ 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \dfrac{21|4x+6|+33}{3|4x+6|+5}$

Giải

Ta có : $P = \dfrac{(21|4x+6|+35)-2}{3|4x+6|+5} = 7 - \dfrac{2}{3|4x+6|+5}$

$Vì\, 3|4x+6|+5 \ge 5, \forall x\, nên\, \dfrac{2}{3|4x+6|+5} \le \dfrac{2}{5}, \forall x$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{3|4x+6|+5} \ge \dfrac{2}{5}, \forall x \Rightarrow 7 - \dfrac{2}{3|4x+6|+5} \ge 7 - \dfrac{2}{5}, \forall x\; hay\; P \ge \dfrac{33}{5}, \forall x$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{33}{5}\, khi\, |4x+6| = 0\; hay\; x = -\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 28. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = -3|x-4| + 8 - 3x$

Giải

Ta có $|x-4| = \begin{cases} x - 4 & nếu\ x \ge 4 \\ -x + 4 & nếu\ x < 4 \end{cases}$

- Nếu $x \ge 4$ thì $Q = -3(x-4) + 8 - 3x = -6x + 20$

Mặt khác, vì $x \geq 4$ nên $-6x \leq -24 \Rightarrow -6x + 20 \leq -24 + 20\, hay\, Q \leq -4$

- Nếu x < 4 thì $Q = -3(-x+4) + 8 - 3x = -4$

Kết hợp hai trường hợp ta có $Q \leq -4$ với mọi x.

Vậy $Q_{max} = -4\, khi\, x = 4$

Ví dụ 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = |3x-7| + |3x+2| + 8$$

Giải

Ta có $|3x-7| + |3x+2| = |-3x+7| + |3x+2| \geq |(-3x+7) + (3x+2)| = 9, \forall x$

Do đó $M \geq 9 + 8 = 17, \forall x$

Vậy $M_{\min} = 17\, khi\, (-3x+7)(3x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (3x-7)(3x+2) \leq 0$

Mà $3x - 7 < 3x + 2\, nên\, 3x - 7 \leq 0 \leq 3x + 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$

4. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Với ha số không âm a, b bất kì ta luôn có :

$$(1) \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(trung bình cộng của hai số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng)

$$(2) \qquad \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \text{ hoặc } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b

Trên đây là bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, (1) gọi là dạng có căn, và (2) là dạng không căn. Bất đẳng thức này còn được mở rộng cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n\,(n \geq 2)$ như sau :

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 ... a_n$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Sau đây là một số kĩ thuật tiêu biểu sử dụng bất đẳng tức Cauchy trong bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

❖ **Kỹ thuật sử dụng trực tiếp**

Ví dụ 30. Co hai số dương a, b thỏa mãn : $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=2$. Chứng minh rằng : $a+b\geq 2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\frac{1}{a^2};\frac{1}{b^2}$ ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{ab}$$

Kết hợp với giả thiết, ta có: $2\geq\frac{2}{ab}\Rightarrow ab\geq 1$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a,b ta có $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (2)

Kết hợp với (1) ta có: $a+b\geq 2$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi cả(1)và (2) xảy ra dấu bằng , hay $a=b=1$

Ví dụ 31 . Cho hai số không âm thỏa mãn $a^2+b^2\leq 2$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}+\sqrt[b]{3bb+2a}\leq 6$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN – ĐHQG HN, 2008)

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm 3a và a + 2b ta có:

$$\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}\leq a.\frac{3a+\left(a+2b\right)}{2}=2a^2+ab \qquad (1)$$

Tương tự ta có $\sqrt[b]{3bb+2a}\leq 2b^2+ab$ (2)

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2) ta có :

$$\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}+\sqrt[b]{3bb+2a}\leq 2\left(a^2+b^2\right)+2ab\leq 4+2ab$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a,b ta có:

$$4+2ab\leq 4+\left(a^2+b^2\right)\leq 4+2=6$$

Từ đó suy ra $\sqrt[a]{3a\left(a+2b\right)}+\sqrt[b]{3bb+2a}\leq 6$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 3a = a + 2b \\ 3b = b + 2b \\ a^2 + b^2 = 2 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$

❖ **Kỹ thuật tách nghịch đảo**

Từ bất đẳng thức Cauchy ta có : $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$

Để áp dụng kết quả này, với mỗi hạng tử a ta tạo ra hạng tử nghịch đảo $\frac{1}{a}$ và sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Ví dụ 32. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$

Giải

Ta có : $P = a + \frac{1}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \left(\text{vì}\, a > b > 0\, \text{nên}\, P > 0 \right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$P^3 = \left[(a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \right]^3 \geq 3^3.(a-b).b.\frac{1}{b(a-b)} = 3^3$$

Suy ra $P \geq 3$(đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $a - b = b = \frac{1}{b(a-b)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Ví dụ 33. Với x > 0, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = 3x^2 + \frac{2}{x^3}$

Giải

Ta có $Q = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}.\text{vì}\, x > 0\, \text{nên}\, Q > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$Q^5 = \left(x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)^5 \geq 5^5.x^2x^2x^2.\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x^3} = 5^5 \Rightarrow Q \geq 5, \forall x > 0$$

Vậy $Q_{\min} = 5\, khi\, x^2 = x^2 = x^2 = \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{x^3}\, hay\, x = 1$

❖ **Kỹ thuật ghép cặp**

Ví dụ 34.Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c$

(Đề thi HSG 9, TP Hồ Chí Minh, 2009)

Giải

Vì $a,b,c>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có :

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 2c \qquad (2)$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\ge 2a \qquad (3)$$

Cộng ba bất đẳng thức (1)(2)(3) vế với vế ta được :

$2\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)\ge 2a+2b+2\, hay\, \dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{bc}{a}=\dfrac{ca}{b}\, hay\, a=b=c$

❖ **Kỹ thuật nhân thêm hằng số**

Ví dụ 35. Với $x\ge 9$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x-9}}{5x}$

Giải

Ta có $P^2=\dfrac{x-9}{25x^2}\Rightarrow 9P^2=\dfrac{9(x-9)}{25x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $9(x-9)\le\left[\dfrac{9+(x-9)}{2}\right]^2=\dfrac{x^2}{4}$

Suy ra $9P^2 \le \dfrac{\dfrac{x^2}{4}}{25x^2} = \dfrac{1}{100} \Rightarrow p^2 \le \left(\dfrac{1}{30}\right)^2 \Rightarrow p \le \dfrac{1}{30}, \forall x \ge 9$

Vậy $P_{\min} = \dfrac{1}{30} khi\, 9 = x - 9\, hay x = 18$ (thỏa mãn)

5.Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 36. Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng $a^4+b^4 \ge 2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp số $(1;1)$ và $(a;b)$ ta có :

$$(1.a+1.b)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right)$$

Kết hợp với giả thiết ta có $2^2 \le 2\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow a^2+b^2 \ge 2$ (1)

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp số $(1;1)$ và $\left(a^2;b^2\right)$ ta có :

$$\left(1.a^2+1.b^2\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(a^4+b^4\right)$$

Kết hợp với (1) ta có $2^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)^2 \le 2\left(a^4+b^4\right) \Rightarrow a^4+b^4 \ge 2$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ a^2=b^2 \end{cases} hay\, a=b$

Kết hợp với giả thiết ta có $a=b=1$

Ví dụ 37. Cho $36x^2+16y^2=9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$P = y - 2x + 5$

Giải

Ta có $(y-2x)^2 = (-2x+y)^2 = \left[\dfrac{1}{3}.(-6x) + \dfrac{1}{4}(4y)\right]^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp số $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4}\right)$ và $(-6x;4y)$ ta có :

$$(y-2x)^2 \le \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right].\left[(-6x)^2+(4y)^2\right] = \frac{5^2}{3^2.4^2}\left(36x^2+16y^2\right) = \frac{5^2}{4^2}$$

Suy ra $|y-2x| \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \le y-2x \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le y-2x+5 \le \frac{25}{4}\, hay\, \frac{15}{4} \le P \le \frac{25}{4}$

Vậy $P_{max} = \frac{25}{4} khi \begin{cases} -18x = 16y \\ y-2x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{5} \\ y = \frac{9}{20} \end{cases}$

Và $P_{\min} = \frac{15}{4} khi \begin{cases} -18x = 16y \\ y-2x = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{-9}{20} \end{cases}$

B.BÀI TẬP

4.45. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 < a^3 + b^3 + c^3$$

4.46. Cho $0 \le a, b, c \le 1$ Chứng minh rằng :

$$a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \le 1$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 1998)

4.47. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{15|x+1| + 32}{6|x+1| + 8}$$

4.48. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3|x-1| + 4 - 3x$

4.49.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = |x+3| + |2x-5| + |x-2|$

4.50. Cho $2x + y = 3$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$D = |2x+3| + |5-y| + 2$$

4.51. ho $0 < a, b, c < 2$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai:

$$a(2-b) > 1; b(2-c) > 1; c(2-a) > 1$$

4.52. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 < c^2$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Thái Bình, 2007)

4.53. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐH sư phạm Hà Nội, 1998)

4.54. Cho $a,b>c$ và $c>0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$$

(Đề thi HSG 9 Tp. Hồ Chí Minh, 2002)

4.55. Cho $a>b\ge 0$. Chứng minh rằng

$$a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\ge 3$$

4.56. Với x>0,hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{3x^4+16}{x^3}$

4.57.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng :

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$$

4.58. Cho $a,b,c>0$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ , ĐH NN – ĐHQG HN, 2007)

4.59. Cho $a,b\ge 1$. Chứng minh rằng $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$

4.60. Cho $a^2+b^2+9=6a+4b$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $Q=3a+4b$