Chuyên đề nâng cao 2
ĐỊNH LÍ MÊ-NÊ-LA-UÝT, ĐỊNH LÍ XÊ- VA

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

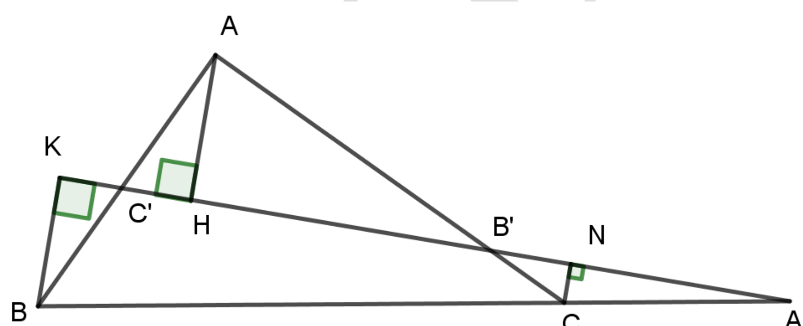
Bài toán 1. Cho tam giác ABC, một đường thẳng d không đi qua các đỉnh tam giác, cắt các đường thẳng BC, AC, AB theo thứ tự ở A', B', C' . Chứng minh rằng $\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=1$

Giải

Kẻ AH, BK, CN cùng vuông góc với đường thẳng d. Suy ra $AH \parallel BK \parallel CN$.

Theo định lí Ta-lét ta có $\frac{B'A}{B'C}=\frac{AH}{CN};\frac{A'C}{A'B}=\frac{CN}{BK};\frac{C'B}{C'A}=\frac{BK}{AH}$

Do đó $\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=\frac{AH}{CN}.\frac{CN}{BK}.\frac{BK}{AH}=1$



HÌNH 3.44.

Chú ý :

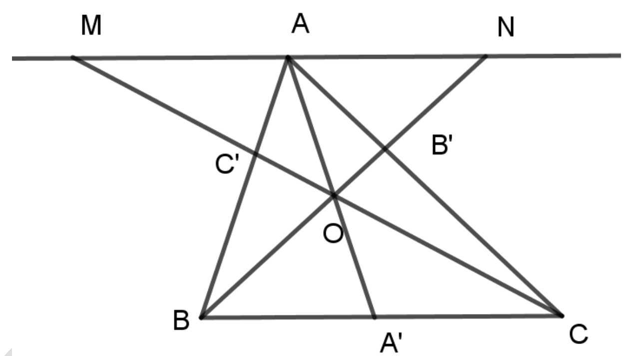
Đảo lại ta cũng có : " nếu các điểm A', B' , C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, AC, AB sao cho trong ba điểm A', B' , C' có đúng một điểm, hoặc cả ba điểm nằm ngoài tam giác ABC và thỏa mãn $\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=1$ thì cả ba điểm A', B' , C' thẳng hàng.

Các định lí thuận và đảo trên mang tên Mênêlauyt (Ménélaus)

Bài toán 2: Cho tam giác ABC. Các điểm A', B' , C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AC, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy ở O. chứng minh rằng $\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=1$

Giải

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt CC', BB' thứ tự ở M, N



HÌNH 3.45

Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{B'A}{B'C}=\frac{AN}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{C'B}{C'A}=\frac{BC}{AM} \quad (2)$$

Cũng theo định lí Ta-lét:

$$\frac{CA'}{MA}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B}{AN} \text{ nên } \frac{CA'}{A'B}=\frac{MA}{AN} \quad (3)$$

Nhân các đẳng thức (1), (2), (3) theo từng vế ta được :

$$\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=\frac{AN}{BC}.\frac{MA}{AN}.\frac{BC}{AM}=1$$

Chú ý :

Đảo lại ta cũng có : " nếu các điểm A', B' , C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, AC, AB của tam giác ABC sao cho $\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=1$ thì các đường thẳng AA', BB' , CC' đồng quy."

Hoặc : " Nếu các điểm A', B' , C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, AC, AB chứa các cạnh của tam giác ABC sao cho trong ba điểm A', B' , C' có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác ABC và thỏa mãn $\frac{B'A}{B'C}.\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}=1$ thì các đường thẳng AA', BB' , CC' hoặc đồng quy hoặc song song với nhau."

Các định lí thuận và đảo trên mang tên **Xêva(Céva)**

B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1.Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt các cạnh BC, CA, AB tại N, P, Q. Gọi R là giao điểm của PQ và BC. Chứng minh rằng $\frac{NB}{NC}=\frac{RB}{RC}$

Giải

Xét tam giác ABC có các đường thẳng AN, BP, CQ đồng quy nên theo định lí Xê va có:

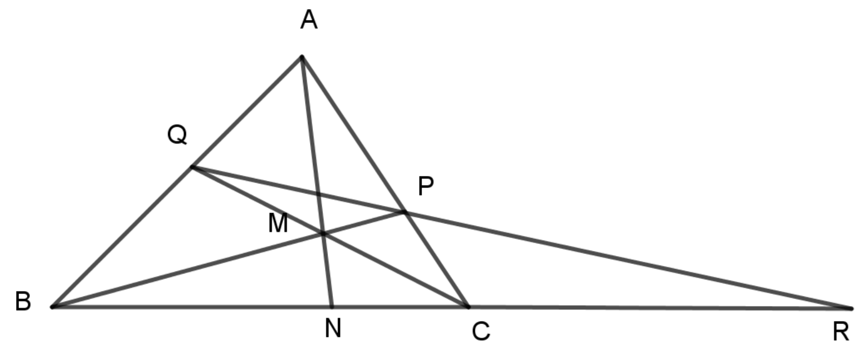
$$\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}.\frac{QA}{QB}=1 \qquad (1)$$

xét ΔABC có P, Q, R thẳng hàng nên theo định lí Mê-nê-la-uýt ta có:

$$\frac{RB}{RC}.\frac{PC}{PA}.\frac{QA}{QB}=1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{NB}{NC}=\frac{RB}{RC}$$



HÌNH 3.46

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài ΔABC dựng ΔBCO vuông cân ở O. AB cắt CO ở E, AC cắt BO ở F. Kẻ $EN \parallel FM$ (N thuộc AC và M thuộc tia AB). MN cắt BC ở Q. Chứng minh AO vuông góc với OQ.

Giải

Lấy C' đối xứng với B qua O, E' thuộc tia OB sao cho OE' = OE, F' thuộc tia đối của OC sao cho OF' = OF. E'C cắt F'C' ở A'. Ta chứng minh OA vuông góc và bằng OA'.

Thật vậy, dễ thấy :

$BE = E'C\left(\Delta OEB = \Delta OE'C\right)$

$\Rightarrow \Delta BEC = \Delta CE'C'\left(c.c.c\right)$

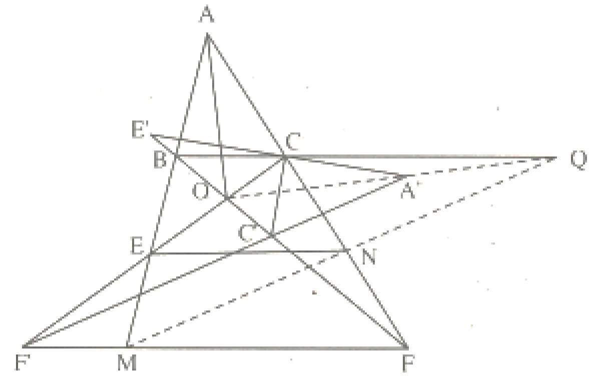
$\Rightarrow EBC = E'CC'$

$\Rightarrow ABC = A'CC'$ (tính chất kề bù)

Tương tự $CF = C'F'\left(\Delta OCF = \Delta OC'F'\right)$

$\Rightarrow \Delta BCF = \Delta CC'F'\left(c.c.c\right) \Rightarrow BCF = CC'F'$

$\Rightarrow ABC = A'C'C$ (tính chất kề bù)



Hình 3.47

Vậy

$\Delta ABC = \Delta A'CC'\left(g.c.g\right)$

$\Rightarrow \Delta OBA = \Delta OCA'\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow AOB = A'OC \Rightarrow OA \perp OA'$ (VÌ OB vuông góc với OC)

Ta cần chứng minh ba đường thẳng BC, OA’ và MN đồng quy.

Đặt $OB = OC = x, OE = OE' = y$. Gọi Q là giao điểm của OA’ và BC. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt

Cho tam giác E’BC với cát tuyến OA’Q, ta được:

$$\frac{QC}{QB}.\frac{x}{y}.\frac{A'E'}{A'C} = 1 \qquad (1)$$

Từ các kết quả trên suy ra

$$AC' = AB, A'E' = AE \text{ và } \frac{A'E'}{A'C} = \frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{QC}{QB}.\frac{x}{y}.\frac{AN}{AC} = 1 \qquad (3)$

Gọi Q’ là giao điểm của MN với BC. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt trong tam giác ABC với cát tuyến MNQ’, ta có: $\frac{Q'C}{Q'B}.\frac{MA}{MB}.\frac{NA}{NC} = \frac{Q'C}{Q'B}.\frac{FC}{FA}.\frac{NA}{NC} \qquad (4)$

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt trong tam giác AEC với cát tuyến FOB, ta suy ra

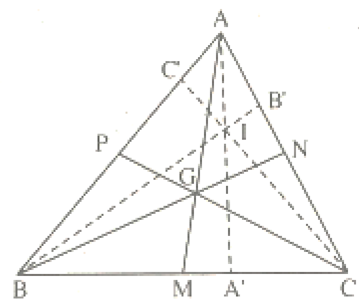
$\frac{FC}{FA}=\frac{BE}{BA}.\frac{x}{y}=\frac{CN}{CA}.\frac{x}{y}$ đem thế vào (4) ta có $\frac{Q'C}{Q'B}.\frac{x}{y}.\frac{AN}{AC}=1$ (5)

Từ (3) và (5) suy ra Q trùng với Q', kết thúc chứng minh.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC, I là điểm nằm trong tam giác. Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, AC, AB tại A', B' và C'. Xác định vị trí của I để tích $AB'.CA'.BC'$ có giá trị lớn nhất.

Giải

Kẻ AM, CP, BN là ba đường trung tuyến của tam giac ABC cắt nhau tại G.



Hình 3.48

Ta có : $AB'.B'C\le\left(\frac{AB'+B'C}{2}\right)^2=AN^2$

Tương tự $CA'.A'B\le CM^2; BC'.C'A\le BP^2$

Suy ra :

$(AB'.CA'.BC')(B'C.A'B.C'A)\le(AN.CM.BP)^2$

Theo định lí Cêva ta có

C.BÀI TẬP

3.81. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC, đường phân giác trong BE và đường phân giác ngoài tại C của tam giác cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng E, M, F thẳng hàng.

3.82. Cho tam giác ABC, đường phân giác BE, CF và đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng E, F, D thẳng hàng.

3.83. Trên các cạnh AB, AC của một tam giác ABC vuông tại A. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABEF và ACGI. BG cắt đường cao AH tại O. Chứng minh rằng C, O, E thẳng hàng.

3.84. Cho tứ giác ABCD . Hai đường thẳng song song với đường chéo AC, lần lượt cắt các cạnh BA, BC, DA, DC theo thứ tự tại G, H, E và F (các giao điểm này không trùng với trung điểm các cạnh tứ giác). Chứng minh rằng các dường thẳng GE, HF,BD đồng quy.

3.85. Trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC lấy điểm K sao cho AK = 3KD; BK cắt AC tại P. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABP và BCP.

3.86. Cho tam giác ABC, một điểm K trên AB sao cho $\frac{AK}{KB}=\frac{1}{2}$,một điểm L trên BC sao cho $\frac{CL}{LB}=2$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK. Tìm diện tích tam giác ABC, biết diện tích của tam giác BQC bằng 2012 (đơn vị diện tích)

3.87. Trên hai cạnh AB,AC của tam giác đều ABC lấy hai điểm E, D sao cho : $\frac{BE}{EA}=\frac{1}{2};\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}$. Các đường thẳng BD và CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $AOC=90^0$

3.88. Cho tam giác ABC, một điểm E trên cạnh AB, mọt điểm F trên cạnh AC và đường cao AM. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để MA là tia phân giác của góc EMF là ba đoạn thẳng AM, BF, CE đồng quy.

3.89. Cho tam giác ABC. Về phí ngoài tam giác ABC dựng ΔBCO vuông cân ở O. AB cắt CO ở E, AC cắt BO ở F, kẻ $EG \parallel BC \parallel FF'$(G thuộc tia BO và F' thuộc tia CO). F'G cắt BC ở Q. Chứng minh AO vuông góc với OQ.

3.40. Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối AB và CD, AD và BC thứ tự cắt nhau tại M và N. Chứng minh rằng các trung điểm I, J, K của AD, BD ,MN thẳng hàng.