Chuyên đề nâng cao 1
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

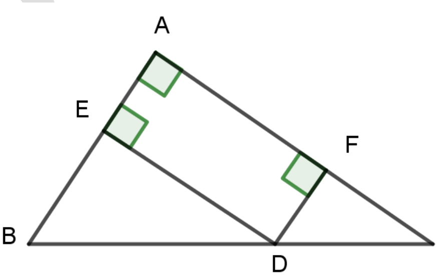
A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí Ta-lét và tính chất của tam giác đồng dạng cho phép ta : Lập một tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng, tính độ dài các đoạn thẳng (dựa vào dãy tỉ số đồng dạng), chứng minh hai góc bằng nhau (góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng),chứng minh một hệ thức giữa các đoạn thẳng, một biểu thức có giá trị không đổi, giải một bài toán về chu vi và diện tích tam giác, giải bài toán dựng hình…

B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ điểm D trên cạnh huyền BC kẻ DE vuông góc với AB và DF vuông góc với AC. Chứng minh hệ thức : $EA.EB + FA.FC = DB.DC$

Giải



HÌNH 3.39

Tứ giác AEDF có ba góc vuông $\left(\hat{A} = E = F = 90^0\right)$

nên là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = FA, DF = EA$

Do $DE \parallel CA$ (vì cùng vuông góc với AB) nên :

$\Delta EBD \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DB}{BC}\ hay\ \frac{EB}{AB} = \frac{FA}{AC} = \dots$

Tương tự ta có

$\Delta FDC \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{DC}{BC}\ hay\ \frac{EA}{AB} = \frac{FC}{AC} = \dots$

Suy ra $\frac{EA.EB}{AB^2} = \frac{FA.FC}{AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}\ hay\ \frac{EA.EB + FA.FC}{AB^2 + AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

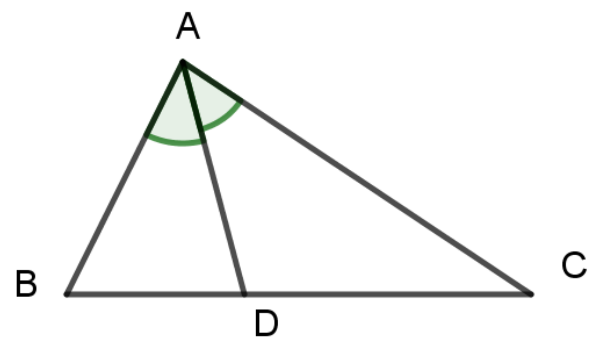
Theo định lí Pytago trong tam giác vuông ABC vuông tại A: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

do đó $EA.EB + FA.FC = DB.DC$

Ví dụ 2 . Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 80^0, \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB + AC}$. Chứng minh rằng $B = 60^0$

Giải

Vẽ AD là đường phân giác của góc BAC của tam giác ABC.



HÌNH 3.40

Ta có

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{DC}{AC}=\frac{DB+DC}{AB+AC}=\frac{BC}{AB+AC}$$

mà $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AB+AC}(gt)$, do đó $\frac{DB}{AB}=\frac{AB}{BC}$

Xét ΔBAD và ΔBCA có $B(chung)$ và $\frac{DB}{AB}=\frac{AB}{BC}$

Do đó $\Delta BAD \backsim \Delta BCA(c.g.c)$

$$\Rightarrow BAD = BCA. \text{ Mà } BAD=\frac{1}{2}BAC=40^0 \text{ nên } BCA=40^0$$

Tam giác ABC có

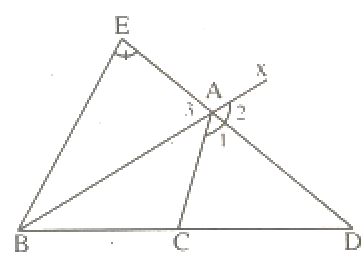
$$BAC+ABC+BCA=180^0\Rightarrow 80^0+ABC+40^0=180^0\Rightarrow ABC=180^0-80^0-40^0=60^0$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác ngoài. Chứng minh rằng :

$$AD^2=DB.DC-AB.AC$$

Giải

Trên tia DA lấy điểm E, sao cho $AEB=ACD$



Hình 3.41

Ta có $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (vì AD là tia phân giác của CAx, $\hat{A}_3=\hat{A}_2$ (đối đỉnh)

Do đó $\hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{A}_3$

Xét ΔABE và ΔADC có : $\hat{A}_3=\hat{A}_1=ACD$

Do đó

$$\Delta ABE \backsim \Delta ADC(g.g)\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC=AD.AE$$

$$\Rightarrow AB.AC=AD(DE-AD)=AD.DE-AD^2$$

ΔACD và ΔBED có : $ACD = BED, ADC\left(chung\right) \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BED\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{DE} = \dfrac{AD}{DB} => AD.DE = DC.DB$

Vậy $AB.AC = DB.DC - AD^2 \Rightarrow AD^2 = DB.DC - AB.AC$

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ CD có chứa A, vẽ Dx sao cho $CDx = BAC$.

Vẽ tia Cy sao cho $DCy = ACB$. Gọi I là giao điểm của Dx và Cy.

$\Delta IDC \backsim \Delta BAC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{ID}{AB} = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{IC}{BC} \Rightarrow AC.ID = AB.CD$ và $\dfrac{IC}{CD} = \dfrac{BC}{AC}$

$\Delta IBC \backsim \Delta DAC\left(c.g.c\right) \Rightarrow \dfrac{IB}{AD} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow AC.IB = BC.AD$

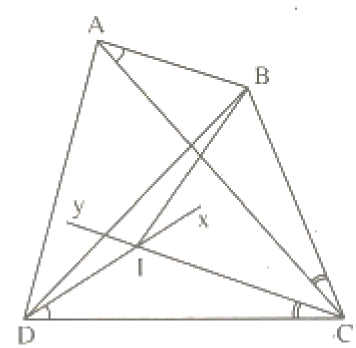
Mà $IB + ID \geq BD$

Do vậy

$AC.BD \leq AC\left(IB + ID\right) = AC.IB + AC.ID = AB.CD + BC.AD$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi I nằm giữa B và D

$\Leftrightarrow BAC = BDC$



Hình 3.42

Ghi chú: Bất đẳng thức vừa chứng minh có tên là bất đẳng thức Ptô-lê-mê

Ví dụ 5. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng các tam giác cân ABM, BCN, CAP có các góc ở đỉnh lần lượt là $AMB = \alpha, BNC = \beta, APC = \gamma$ thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$. Chứng minh rằng tam giác MNP có số đo ba góc là $\dfrac{\alpha}{2}; \dfrac{\beta}{2}; \dfrac{\gamma}{2}$

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ NC không chứa B dựng điểm E sao cho $CNE = APC, NE = NC$

Khi đó $NB = NC = NE$. Gọi Nx là tia đối của NE

Ta có $BEC = BEN + NEC = \frac{1}{2}BNx + \frac{1}{2}CNx = \frac{1}{2}BNC$

Vì $BNC + CNE + BNE = 360^0, AMB + BNC + APC = 360^0$

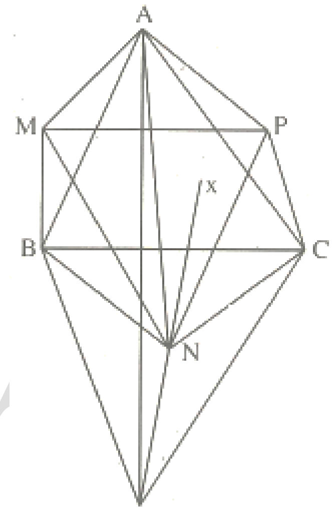
$CNE = APC$ nên $AMB = BNE$

$\Delta MBA \backsim \Delta NBE$ (hai tam giác cân có $AMB = BNE$)

$\Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BE}, MBA = NBE$

Ta lại có $MBN = MBA + ABN = NBE + ABN = ABE$

$\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BE} \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BE} \Rightarrow \Delta BMN \backsim \Delta BAE \Rightarrow BNM = BEA$



Hình 3.43

Chứng minh tương tự ta có $CNP = CEA$

Do đó $BEA + CEA = BNM + CNP$ và $BEC = \frac{1}{2}BNC \Rightarrow PNM = \frac{1}{2}BNC = \frac{\beta}{2}$

Chứng minh tương tự có $PMN = \frac{\alpha}{2}, MPN = \frac{\gamma}{2}$

C.BÀI TẬP

3.71. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC lần lượt vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tại D, E, F. Trên các tia MD, ME, MF lần lượt lấy các điểm A’, B’ , C’ sao cho $\frac{MA'}{BC} = \frac{MB'}{CA} = \frac{MC'}{AB}$

3.72. Cho tam giác ABC $(BC = a, AC = b, AB = c)$, I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giácABC. Chứng minh rằng $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$

3.73. Cho tam giác cân ABC, $\hat{A} = 20^0, AB = AC = b, BC = a$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$

3.74. Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy hai điểm D,E sao cho BD = CE. Chứng minh rằng nếu $BAD = CAE$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

3.75. Cho các điểm M, N, P thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC cân tại A sao cho tứ giác MNAP là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $OMP = AMN$.

3.76. Cho tam giác ABC. Gọi AM và AD lần lượt là đường trung tuyến và đường phân giác của tam giác ABC. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N. Chứng minh rằng $\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

3,77. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC vẽ $MD \perp BC$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp AB$ tại F. trên các tia MD, ME, MF lần lượt lấy các điểm I, K, L sao cho $\frac{MI}{BC} = \frac{MK}{AC} = \frac{MI}{AB}$.

Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác IKL.

3.78 Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 3AB. Trên cạnh AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh rằng $AEB + ACB = 45^0$

3.79. Cho hình bình hành ABCD và điểm M nằm trong hình bình hành. Giả sử $MAB = MCB$. Chứng minh rằng $MDC = MBC$

3.80. Cho tứ giác ABCD, trong đó $ABC = ADC$ và $ABC + BCD < 180^0$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB, CD. Chứng minh rằng $AC^2 = CD.CE - AB.AE$