Chuyên đề 1
LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hệ thức dạng $a > b\left(hay\, a < b; a \le b; a \ge b\right)$ được gọi là bất đẳng thức, a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.
- Khi cộng cùng một số vào hai vết của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c, \forall c$$
- Khi nhân (chia) cả hai vế của một bất đẳng thức cho một số dương ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
$$a > b \Leftrightarrow ac > bc, \forall c > 0$$
- Khi nhân (chia) cả hai vế của một bất đẳng thức cho một số âm ta được một bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.
$$a > b \Leftrightarrow ac < bc, \forall c < 0$$
- Tính chất bắc cầu $a > b\,\text{và}\, b > c\,\text{thì}\, a > c$

B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. So sánh hai số, hai biểu thức

Ví dụ 1. Cho $x < y$, hãy so sánh:

$a) x - y\,\text{và}\, 0$

$b) -2x + 3\,\text{và} -2y + 3$

$c) x + y\,\text{và}\, 2x; 2y$

Giải

a) Từ $x < y$, cộng hai vế với $(-y)$, ta được $: x + (-y) < y + (-y) \Leftrightarrow x - y < 0$

b) Từ $x < y$, nhân hai vế với (-2), ta được : $x(-2) > y(-2)\, hay -2x > -2y$

Cộng hai vế với 3 ta được : $-2x + 3 > -2y + 3$

c) Từ $x < y$, cộng hai vế với y, ta được : $x + y < y + y \Leftrightarrow x + y < 2y$ (1)

Từ $x < y$, cộng hai vế với x, ta được : $x + x < y + x \Leftrightarrow 2x < y + x$ (2)

Từ (1) va (2) ta có $2x < x + y < 2y$

Ví dụ 2. Hãy so sánh x và y nếu :

a) $-7x + 13 \ge -7y + 13$

b) $11x - 1 > 11y + 2$

Giải

a) Từ $-7x+13 \geq -7y+13$ suy ra $-7x \geq -7y$ (cộng hai vế với – 13)
$\Rightarrow x \leq y$ (chia hai vế cho – 7)
Vậy $x \leq y$

b) Vì $2 > -1 \Rightarrow 11y+2 > 11y-1$ lại có $11x-1 > 11y+2$
theo tính chất bắc cầu : $11x-1 > 11y-1$
$\Rightarrow 11x > 11y$ (cộng hai vế với 1)
$\Rightarrow x > y$ (chia hai vế cho 11)
Vậy $x > y$

Ví dụ 3. Cho $a < b; c < d$ hãy so sánh $a+c$ và $b+d$

Giải

Ta có: $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ (1)

$c < d \Rightarrow c+b < d+b$ (2)

Từ (1) và (2) theo tính chất bắc cầu ta có : $a+c < b+d$

Ví dụ 4. Cho $a,b,c,d > 0$ thỏa mãn $a < b; c < d$. Hãy so sánh ac và bd.

Giải

Từ $a < b$ và $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ (1)

Từ $c < d$ và $b > 0 \Rightarrow cb < bd$ (2)

Từ (1) và (2) theo tính chất bắc cầu ta có : $ac < bd$

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 5. Cho $a,b \in R$ chứng minh rằng : $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$ (1)

Giải

Xét hiệu $2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2 = 2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2 = a^2-2ab-b^2 = (a-b)^2 \geq 0, \forall a,b$

Vậy $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2$

Đẳng thức xảy ra khi a = b.

Nhận xét

- Để chứng minh $A > B$ ta xét hiệu A – B và chứng tỏ $A-B > 0$
- Bất đẳng thức (1) có thể viết lại như sau :

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ và } (1a+1b) \leq \left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right)$$

Kết quả tổng quát của bất đẳng thức này được chứng minh trong ví dụ sau đây :

Ví dụ 6. Cho bốn số a, b, c, d chứng minh rằng :

$$(ab+cd)^2 \le (a^2+c^2)(b^2+d^2) \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc \; hay \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} (có \; bd \ne 0)$

Giải

Ta có $(2) \Leftrightarrow a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \le a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2$

$\Leftrightarrow 2abcd \le a^2d^2 + c^2b^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a, b,c,d nên bất đẳng thức (2) cũng đúng với mọi a, b, c, d

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc \; hay \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Lưu ý khi b hoặc d = 0, hiển nhiên (2) trở thành đẳng thức. Ở đây ta xét $b, d \ne 0$

Nhận xét

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức, dùng các phép biến đổi tương đương để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Bất đẳng thức (2) có tên gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp bốn số : $(a;c)$ và $(b;d)$

Ví dụ 7. Cho ba số a,b,c thỏa mãn $-1 \le a,b,c \le 4$ và $a+2b+3c \le 4$. Chứng minh rằng : $a^2+2b^2+3c^2 \le 36$.

Giải

Vì $-1 \le a \le 4 \Rightarrow \begin{cases} a+1 \ge 0 \\ a-4 \le 0 \end{cases} \Rightarrow (a+1)(a-4) \le 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le 3a+4 \qquad (1)$

Đẳng thức xảy ra khi $a=-1$ hoặc $a=4$

Chứng minh tương tự ta cũng có : $b^2 \le 3b+4 \Rightarrow 2b^2 \le 6b+8 \qquad (2)$

Và $c^2 \le 3c+4 \Rightarrow 3c^2 \le 9c+12 \qquad (3)$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1),(2),(3) ta được :

$$a^2+2b^2+3c^2 \le 3(a+2b+3c)+24 \le 3.4+24$$

$$\Rightarrow a^2+2b^2+3c^2 \le 36 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}(a+1)(a-4)=0\\(b+1)(b-4)=0\\(c+1)(c-4)=0\\a+2b+3c=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=4\\c=-1\end{cases}$

Nhận xét

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức có điều kiện, nó chỉ là bất đẳng thức khi thỏa mãn điều kiện đi kèm là $-1 \le a,b,c \le 4$ và $a+2b+3c \le 4$.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có :

$$a < b+c \Leftrightarrow a^2 < ab+ca \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có : $b^2 < bc+ab \qquad (2)$

$$c^2 < ca+bc \qquad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức 1),(2),(3) ta được : $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$

Nhận xét :

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng các bất đẳng thức quen biết, đó là bất đẳng thức tam giác. Cách làm này gọi là phương pháp sử dụng bất đẳng thức trung gian, một phương pháp phổ biến trong chứng minh bất đẳng thức.

C.BÀI TẬP

4.1. Cho $x \ge y$, hãy so sánh :

$a) -8x+7$ và $-8y+7$

$b) 9x-1$ và $9y-1$

4.2. Hãy so sánh x và y nếu :

$a) -19x-37 \le -19y-37$

$b) -23x-2 > -23y+3$

4.3.So sánh số x và số 0 nếu :

$a) 5x < 9x$

$b) -7x \le 2x$

4.4 Cho $a > b, c > d$. Hãy so sánh $ac+bd$ và $ad+bc$

4.5 Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có:

$a)\dfrac{15}{4x^2-12x+19}\le\dfrac{3}{2}$

$b)\dfrac{4x+3}{x^2+1}\le 4$

4.6 Cho $a>b>0$ chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

4.7. Chứng minh rằng với mọi x ta có : $x^6+x^4-x^3+x^2+1>0$

4.8 .Cho hai số thực a và b chứng minh rằng :

$a)\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$,với $a,b\ge 0$

$b)a^2+b^2\ge 2ab$

$c)(a+b)^2\ge 4ab$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

4.9. Cho a,b,c > 0. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

$a)\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$

$b)\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c$

4.10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

4.11. Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$

4.12. Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\le\dfrac{1}{1+ab}$

4.13. Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d, e ta có :

$a)a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$b)a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

(Đề thi vào 10 chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh,2001)

4.14. Cho $a>b>c>0$. Chứng minh rằng :

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2>a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3$$

(Đề thi vào 10 khối phổ thông, ĐHSP TP Hồ Chí Minh, 2007)

4.15. Cho $a,b>0$ thỏa mãn : $a+b=1$ chứng minh rằng:

$a) a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2};$ $b) a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4};$ $c) a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$

4.16.Chứng minh rằng với mọi a,b,c ta có : $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$