Chuyên đề 4
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG
CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ
KHÁI NIỆM TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG
1.Tam giác đồng dạng

a) định nghĩa:Tam giác A’B’C’ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu :

$$A' = A; B' = B; C' = C; \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

Tam giác A’B’C’ đồng dạng với tam giác ABC được kí hiệu là : $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (viết theo thứ tự các cặp đỉnh tương ứng)

Tỉ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ được gọi là tỉ số đồng dạng.

b)Tính chất

Tính chất 1. Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.

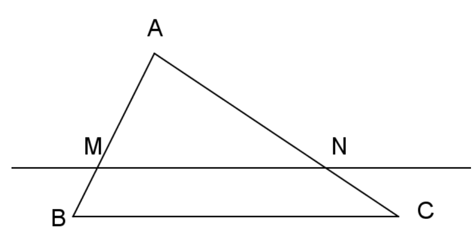
Tính chất 2 Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

Tính chất 3.Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$ và $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

2. Định lí

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Cho $\Delta ABC, MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$



Hình 3.24

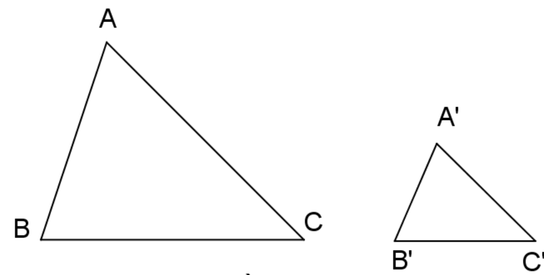
Chú ý : định lí cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

***Trường hợp đồng dạng thứ nhất**

Định lí : Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng:

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$



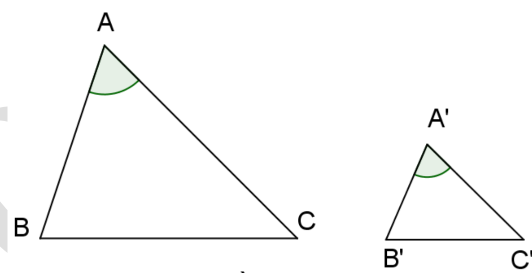
HÌNH 3.25

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'(c.c.c)$

***Trường hợp đồng dạng thứ hai**

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau,thì hai tam giác đó đồng dạng.

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ và $\hat{A} = A'$



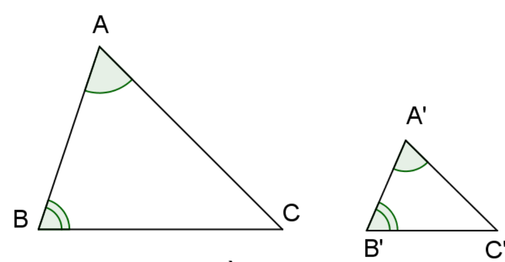
HÌNH 3.26

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'(c.g.c)$

***Trường hợp đồng dạng thứ ba**

Định lí :Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $\hat{A} = A'$ và $B = B'$



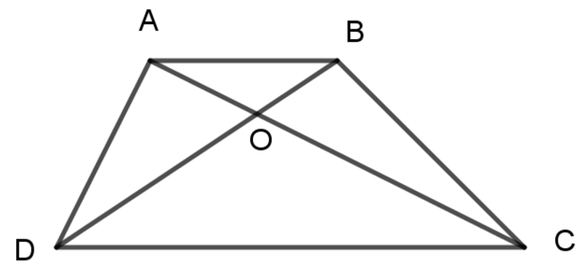
HÌNH 3.27

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'(g.g)$

B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình thang ABCD $(AB \parallel CD, AB < CD)$, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $\Delta OAB \backsim \Delta OCD$

Giải



Hình 3.28

Xét ΔOCD có $AB \parallel CD\left(gt\right)$ nên ta có:

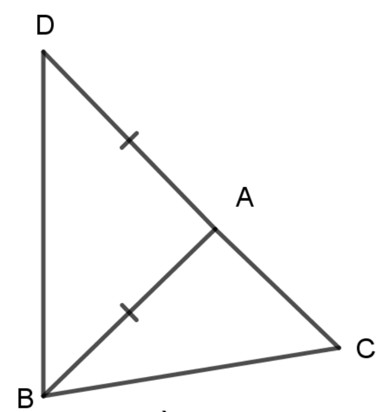
$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ (hệ quả của định lí Ta-lét)

ΔOAB và ΔOCD có $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$

Do đó $\Delta OAB \backsim \Delta OCD\left(c.c.c\right)$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB=2,5cm, AC=2cm, BC=3cm$ Chứng minh rằng $\hat{A}=2B$

Giải



HÌNH 3.29

Trên tia đối của tia AC lấy điểm d sao cho AD = AB => ΔABD cân tại A.

$\Rightarrow ADB=ABD$ nên $BAC=2CDB$ $\quad\quad (1)$

Xét

ΔABC và ΔBDC có C chung, $\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{CD}\left(\text{vì } \frac{2}{3}=\frac{3}{4,5}\right)$

Do đó

$\Delta ABC \backsim \Delta BDC\left(c.g.c\right)\Rightarrow ABC=CDB$ $\quad\quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $BAC=2ABC$

Ví dụ 3: Cho hình thoi ABCD có $B=60^0$.Một đường thẳng đi qua đỉnh D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF, CE. Chứng minh rằng $AD^2=AM$.AF

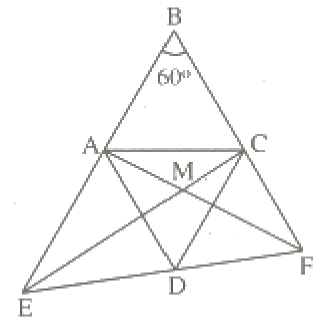
Giải

Ta có: BA = BC (cạnh hình thoi) và $B = D = 60^0$ *nên* ΔDAC đều => AC = AD

Xét ΔADE và ΔCFD có AED=CDF (đồng vị, $AB \parallel CD$)

$ADE = CFD$ (đồng vị, $AD \parallel BC$) $\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta CFD(g.g)$

Suy ra $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{CD}{CF}$ *hay* $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{CF}$



Hình 3.30

Xét

ΔAEC và ΔCAF có $CAE = ACF \left(=120^0\right), \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{CF}(cmt)$

$\Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta CAF(c.g.c) \Rightarrow ACE = CFA$

Xét ΔACM và ΔAFC có CAF *chung* $ACE = CFA(cmt)$

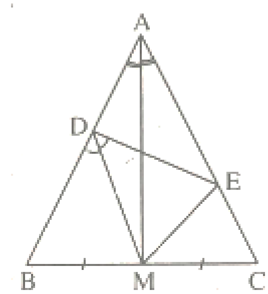
$\Rightarrow \Delta ACM \backsim \Delta AFC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AC}{AF}$ => $AC^2 = AM.AF$

Vậy $AD^2 = AM.AF$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho DM là phân giác của góc BDE.

Chứng minh rằng : $BD.CE = \dfrac{BC^2}{4}$

Giải



Hình 3.31

Xét ΔADE ,AM là tia phân giác trong, DM là tia phân giác ngoài tại D nên EM là tia phân giác góc ngoài tại E.

Xét tứ giác BDEC có $2\left(BDM+DBC+MEC\right)=360^0$

$\Rightarrow BDM+DBC+MEC=180^0$ (1)

Mặt khác, trong ΔBDM có :

$BDM+DBC+DMB=180^0$ (2)

Từ (1) và (2) cho $MEC=DMB$

Xét ΔBMD và ΔCEM có $B=C, MEC=DMB\left(cmt\right)$

$\Rightarrow \Delta BMD \backsim \Delta CEM\ (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM}=\frac{BM}{CE}\Rightarrow BD.CE=BM.CM=\frac{BC^2}{4}$$

C.BÀI TẬP

3.40. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta HIK$ theo tỉ số đồng dạng $k=\frac{2}{5}$

a) Tính chu vi của hai tam giác đã cho.

b) Tính chu vi tam giác HIK khi chu vi tam giác ABC bằng 60cm

c) Cho biết hiệu chu vi hai tam giác trên là 90cm, tính chu vi của mỗi tam giác.

3.41. Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC}=\frac{2}{3}$ kẻ

$MH \parallel AC\left(H\in AB\right)$, và $MK \parallel AB\left(K\in AC\right)$

a) Tính MB, MC khi biết BC = 25 cm

b) Tính chu vi tam giác ABC khi biết chu vi tam giác KMC bằng 30cm.

c) Chứng minh rằng $HB.MC = BM.KM$

3.42. Cho tứ giác ABCD có $AB = 8cm, BC = 4cm, CD = 20cm, AD = 25cm, AC = 10cm$. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.

3.43. Cho tam giác ABD có $\hat{A} = 90^0$. Vẽ đường cao AH. Gọi M là điểm đối xứng với A qua H. Trên đoạn thẳng HM lấy E bất kì, qua điểm D kẻ đường thẳng vuông góc với tia BE tại C và cắt AH tại F.

a) chứng minh rằng $AH^2 = BH.HD = HE.HF$

b) Chứng minh rằng $\frac{AF}{AE} = \frac{MF}{ME}$

3.44. Cho tam giác ABC và G là điểm thuộc miền trong tam giác. Tia AG cắt BC tại K và tia CG cắt AB tại M. Biết rằng $AG = 2GK$ và $CG = 2GM$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

3.45. Cho tam giác đều ABC cạnh a, M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho DM là tia phân giác của góc BDE. Tính BD, CE.

3.46. Cho tam giác ABC đều, gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm P trên cạnh AB và điểm Q trên cạnh AC sao cho $PMQ = 60^0$ chứng minh:

a) Hai tam giác PBM và MCQ đồng dạng.

b)Hai tam giác MBP và QMP đồng dạng.

c) $\frac{S_{MPQ}}{S_{ABC}} = \frac{PQ}{2BC}$

3.47. Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ biết $\hat{A} + A' = 180^0$ và $B = B'$. Chứng minh rằng $AB.A'B' + AC.A'C' = BC.B'C'$

3.48. Cho tam giác ABC đều, O là trọng tâm của tam giác và M là điểm bất kì thuộc cạnh BC (M không trùng với trung điểm của cạnh BC). Kẻ MP và MQ lần lượt vuông góc với AB và AC, các đường vuông góc này lần lượt cắt OB, OC tại I và K.

a) Chứng minh tứ giác MIOK là hình bình hành.

b) Gọi R là giao điểm của PQ và OM. Chứng minh R là trung điểm của PQ.

3.49. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2B = 4C$. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$

3.50. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm bất kì trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Chứng minh rằng DE vuông góc với BM.

3.51. Trên hai cạnh AB và BC của hình vuông ABCD lấy hai điểm P và Q theo thứ tự sao cho BP = BQ. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống CP.Chứng minh rằng $DHQ = 90^0$

3.52. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC,AC. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác.

a) chứng minh rằng $\Delta OMN \backsim \Delta HAB$,tính tỉ số đồng dạng.

b)So sánh độ dài AH và OM

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\Delta HAG \backsim \Delta OMG$

d) Chứng minh rằng $S_{AGH} = 2S_{AGO}$

3.53. Cho tam giác ABC. Trên tia đốicủa tia AC lấy điểm D, Trên nửa mặt phẳng bờ DC không chứa B vẽ tia Dx sao cho $CDx = ABC$. Gọi E là giao điểm của tia Dx và AB. Chứng minh rằng : $BC.DE = AC.AE + AB.AD$.

3.54. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, D là điểm thuộc cạnh AC. Từ C vẽ đường thẳng d song song với B. Vẽ $BE \perp d$ tại E. Chứng minh $\Delta BAE \backsim \Delta DBC$

3.55. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE với H, BC. Chứng minh rằng $MD.NE = ME.ND$

3.56. Cho tam giác nhọn ABC ,ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. từ A kẻ đường thẳng song song với BH cắt CH tại P và kẻ đường thẳng song song với CH cắt BH tại Q. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp PQ$.

3.57. Hình thoi ABCD có $\hat{A} = 120^0$, M là điểm trên cạnh AB. Các đường thẳng DM, BC cắt nhau tại N.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AM.CN$

b) Gọi E là giao điểm của tia CM với AN. Tính số đo AEC

c) Trên tia đối của tia BD lấy điểm F sao cho tia FM cắt các cạnh AD, AC lần lượt tại S và K. Chứng minh rằng $\frac{DA}{SA} + \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AK}$

3.58. Cho tam giác ABC không can. M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $AMB - C = AMC - B$. Chứng minh rằng $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$