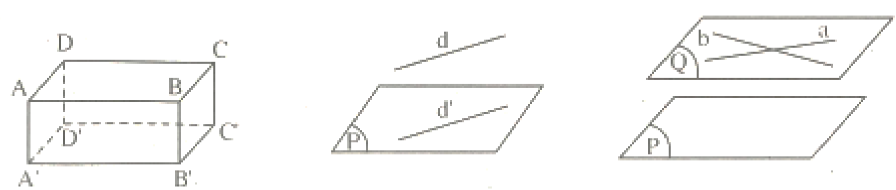
Chuyên đề 1
HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

1. Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là hình chữ nhật.
   Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
   Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình vuông.
2. Qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một mặt phẳng
3. Trong không gian, hai đường thẳng a và b được gọi là song song với nhau nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
   Với hai đường thẳng phân biệt a,b trong không gian, chúng có thể cắt nhau, hoặc song song với nhau hoặc không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.
4. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
5. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.
   Một đường thẳng d không thuộc mặt phẳng (P) và song song với đường thẳng d’ thuộc mặt phẳng (P) thì d song song với mặt phẳng (P).

$$\left.\begin{array}{l} d \not\subset mp(P) \\ d' \subset mp(P) \\ d \parallel d' \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel mp(P)$$



Hình 4.1

6. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.
 - Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm đó và gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
 - Nếu mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng a,b cắt nhau mà a, b cùng song song với mặt phẳng (P) thì $mp(Q) \parallel mp(P)$

II. THỂ TÍCH HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

1. Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\left.\begin{matrix} b,c\subset mp(P) \\ \text{b cắt c} \\ a\perp b \\ a\perp c \end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp mp(P)$$

-Nếu đường thẳng a vuông góc với mp(P) tại A thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A của mp(P).

- Nếu đường thẳng a thuộc mp(P) và a vuông góc với mp(Q) thì mp(P) vuông góc với mp(Q)

$$\left.\begin{matrix} a\subset mp(P) \\ a\perp mp(Q) \end{matrix}\right\}\Rightarrow mp(P)\perp mp(Q)$$

2. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

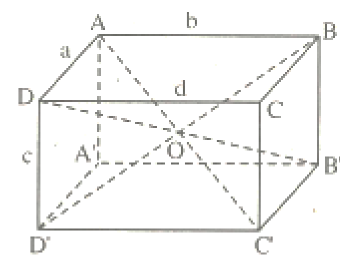
$S_{xq}=2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao)

Diện tích toàn phần

$S_{tp}=S_{xq}+S_{\text{đáy}}$

- Đối với hình lập phương cạnh a :

  $S_{xq}=4a^2;S_{tp}=6a^2$



Hình 4.2

3. Thể tích hình hộp chữ nhật:

   $V=a.b.c(a;b;c$ là ba kích thước)

Đối với hình lập phương cạnh a thì $V=a^3$

4. Trong hình hộp chữ nhật

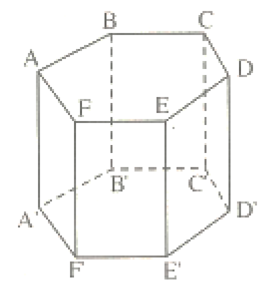
-4 đường chéo đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

- Bình phương của mỗi đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước :

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

1. Hình lăng trụ đứng có hai đáy là hai đa giác bằng nhau, các mặt bên là những hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
2. Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng song song với nhau và cùng vuông góc với hai mặt đáy. Độ dài cạnh bên gọi là chiều cao của lăng trụ đứng.
3. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.



Hình 4.3

IV. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG.

1. Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích các mặt bên :

$S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao)

2. Diện tích toàn phần của lăng trụ đứng bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy :

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$

3. Thể tích lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao :

$V = S.h$(S là diện tích đáy, h là chiều cao)

B.MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F ,G ,M, N lần lượt là trung điểm của $CD', CB', CC', B'C', C'D'$. Chứng minh rằng :

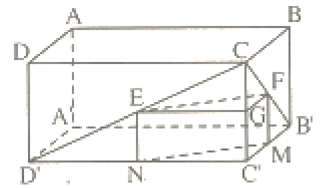
a) EFMN là hình bình hành

b) $CC' \parallel mp(EFMN)$

c) $mp(EFG) \parallel mp(ABCD)$

Giải

a) Trong tam giác B’CD’ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel B'D'$ và $EF = \frac{1}{2}B'D'$



Hình 4.4

Tương tự, trong $\Delta B'C'D'$ có $MN \parallel B'D'$ và $MN = \frac{1}{2}B'D'$

Do đó $EF \parallel MN$ và $EF = MN$. Vậy EFMN là hình bình hành.

b) Trong tam giác CC’B’ có FM là đường trung bình nên

$FM \parallel CC'$, mà $FM \subset mp(EFMN)$ nên $CC' \parallel mp(EFMN)$

c) Ta có $FG \parallel BC \Rightarrow FG \parallel mp(ABCD)$

$GE \parallel CD \Rightarrow GE \parallel mp(ABCD)$

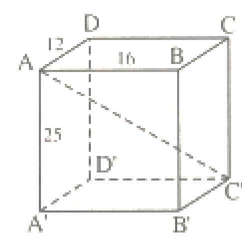
Vì FG và GE cùng thuộc mp(EFG); FG cắt GE tại G nên $mp(EFG) \parallel mp(ABCD)$

Ví dụ 2 : Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 16; AD = 12; AA' = 25$

a) Chứng minh ACC’A’; BDD’B’ là các hình chữ nhật.
b) Kiểm tra lại công thức tính độ dài đường chéo của hình hộp.
c) Tính diện tích toàn phần của hình hộp.

Giải

a) Ta có $AA' \parallel CC'; AA' \perp A'C' \left(do\ AA' \perp mp(A'B'C'D')\right)$



Hình 4.5

nên ACC’A’ là hình chữ nhật. Chứng minh tương tự BDD’B’ là hình chữ nhật

b)Áp dụng định lí Pytago ta có

$AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 = AA'^2 + BD^2$ (vì $BD = A'C'$)

$= AA'^2 + AB^2 + AD^2$

c)Ta có $S_{xq} = 2ph = 2(12+16).25 = 1400$ (đvdt)

$S_{xq} = S_{tp} + 2S_{đáy}$=1400+2.12.16=1784 (đvdt)

Ví dụ 3 . Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, G, M,N lần lượt là trung điểm của CD’;CB’;CC’;B’C’;C’D’ chứng minh rằng :

$a) CC' \perp mp(EFG)$

$b) mp(EFG) \perp mp(CC'D')$

Giải

a) (h.4.4) $CC' \perp B'C'$, mà $B'C' \parallel GF$ nên $CC' \perp GF$ (1)

$CC' \perp D'C'$, mà $D'C' \parallel GE$ nên $CC' \perp GE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CC' \perp mp(EFG)$

b) Ta có $CC' \subset mp(CC'D') \Rightarrow mp(EFG) \perp mp(CC'D')$

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Có đấy ABCD là hình vuông cạnh a; $AC'A' = 60^0$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình hộp.

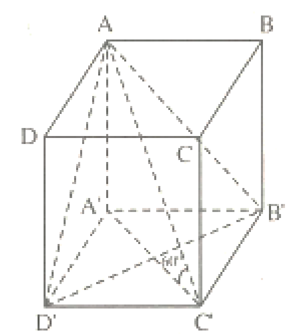
Tam giác vuông AA'C' có $AC'A' = 60^0$ nên :

$C'AA' = 30^0 \Rightarrow A'C' = \frac{1}{2}AC' \Rightarrow AC' = 2a\sqrt{2}$

$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{8a^2 - 2a^2} = a\sqrt{6}$

Diện tích xung quanh của hình hộp là $S_{xq} = 4a^2\sqrt{6}$

Thể tích của hình hộp là: $V = a^2 a\sqrt{6} = a^3\sqrt{6}$



Hình 4.6

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M,N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABB', A'B'C', A'C'C. chứng minh MNPQ là hình bình hành.

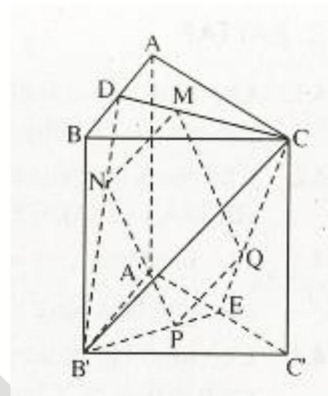
Giải

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và A'C'.

Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác ta có :

$\frac{DM}{DC}=\frac{1}{3};\frac{DN}{DB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{DN}{DB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN\parallel B'C$ và $\frac{MN}{B'C}=\frac{1}{3}$

Vậy $MN\parallel PQ$ và $MN=PQ$ nên MNPQ là hình bình hành.



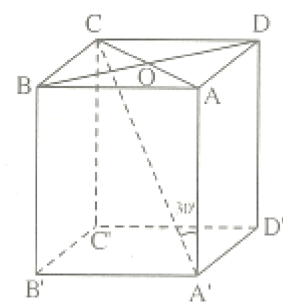
Hình 4.7

Ví dụ 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi,AB = 8cm $BAD=\text{ACA}'=60^0$ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Giải

Tam giácADB có $AB=AD;BAD=60^0$ nên là tam giác đều, suy ra

$$AO=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\Rightarrow AC=2AO=8\sqrt{3}$$



Hình 4.8

Tam giác A'AC có $A'AC=90^0,\text{ACA}'=60^0$

Nên $A'C=2AC=16\sqrt{3}\Rightarrow \text{AA}'=\frac{A'C\sqrt{3}}{2}=24$

Diện tích xung quanh của lăng trụ là :

$S_{xq}=4.AB.\text{AA}'=4.8.24=768\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là :

$S_{xq}=S_{tp}+2\text{S}_{\text{đáy}}=$

$$768+2\frac{AC.BD}{2}=768+2\frac{8\sqrt{3}.8}{2}=768+64\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

C.BÀI TẬP.

4.1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Chứng minh $MN \parallel mp(A'C'D)$.

4.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (BCD'A') và (ADC'B')

4.3 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình vuông, chiều cao hình hộp bằng h, $\widehat{B'AD'} = 60^0$. Tính diện tích toàn phần của hình hộp

4.4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và C'D'. Chứng minh rằng các đường thẳng AC', BD', CA', DB', MN đồng quy.

4.5. Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước bằng 24 (cm) và diện tích toàn phần bằng 376 (cm^2). Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật đó.

4.6 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB : AD : AA' = 3 : 4 : 5$ và đường chéo AC bằng 5cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình hộp chữ nhật.

4.7. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BB' và B'C'. Chứng minh $MN \parallel mp(BA'C')$

4.8. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi O và O' là tâm các mặt đáy. Chứng minh rằng :

a) $OO' \perp mp(A'B'C'D')$

b) $mp(AA'C'C) \perp mp(BB'D'D)$

4.9. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C'. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BB', CC' và G là trọng tâm của tam giác A'B'C'. Chứng minh mp(BA'N) song song với mp(MC'G).

4.10. Một hình hộp chữ nhật có kích thước đáy 82cm x 70cm và chiều cao 60cm. Người ta xếp vào bên trong những hình hộp có đáy là hình vuông cạnh 10cm, chiều cao 59cm, theo chiều đứng của hình hộp.

a) Tính số hộp nhỏ có thể xếp được.

b) Tính thể tích hộp không sử dụng.

4.11. Một lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh, số cạnh là 26. Diện tích xung quanh là 200cm^2, chiều cao là 10cm. Tính thể tích của lăng trụ.

4.12. Trong các hình hộp chữ nhật có độ dài đường chéo bằng nhau và bằng d, hãy tìm hình hộp có diện tích toàn phần lớn nhất.