§2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa bất phương trình một ẩn

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $\mathrm{D} = D_f \cap D_g$.

Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \le g(x)$, $f(x) \ge g(x)$ được gọi là ***bất phương trình một ẩn***; x được gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là tập xác định của bất phương trình.

$x_0 \in D$ gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu $f(x_0) < g(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm(hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

Chú ý : Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác đinh D của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in D$. Điều kiện đó gọi là điều kiện xác định của bất phương trình, gọi tắt là ***điều kiện của bất phương trình***.

2. Bất phương trình tương đương, biến đổi tương đương các bất phương trình.

a) Định nghĩa: Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là ***tương đương*** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Kí hiệu: Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết

$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$

- Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là ***phép biến đổi tương đương***.

b) Định lý và hệ quả:

Định lý 1: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D; $y = h(x)$ là hàm số ***xác định*** trên D. Khi đó trên D, Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình sau

1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

2) $f(x).h(x) < g(x).h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in D$

3) $f(x).h(x) > g(x).h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in D$

Hệ quả: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D. Khi đó

1) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^3(x) < g^3(x)$

2) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$ với $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0,\ \forall x \in D$

Lưu ý: Khi giải phương trình ta cần chú ý

- Đặt điều kiện xác định(đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.
- Đối với việc giải bất phương trình ta thường thực hiện phép biến đổi tương đương nên cần lưu ý tới điều kiện để thực hiện phép biến đổi tương đương đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH.**

1. Phương pháp giải.

- Điều kiện xác định của bất phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x)$, $g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có yêu cầu trong đề bài)
- Điều kiện để biểu thức

  - $\sqrt{f(x)}$ xác định là $f(x) \geq 0$
  - $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định là $f(x) \neq 0$
  - $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định là $f(x) > 0$

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $x + \dfrac{5}{4x^2 - 9} < 1$ b) $\sqrt{4 - 2x} \geq \dfrac{x+1}{x^2 - 2x - 1}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $4x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{3}{2}$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$$\begin{cases} 4 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $2x + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{3-x} + 3$ b) $\sqrt{-x^2 + 4x - 4} \leq 27 - 3x^3$

c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + 2$ d) $\sqrt{(x-1)^2(3-4x)} - 5x > \sqrt{4x-3} - 7$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Thử vào bất phương trình thấy $x = 3$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $S = \{3\}$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$-x^2 + 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào thấy thỏa mãn bất phương trình

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $S = \{3\}$

c) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Với điều kiện đó bất phương trình tương đương với $\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy bất phương trình vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \varnothing$

d) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} (x-1)^2(3-4x) \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases}$ (*)

Dễ thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện (*).

Nếu $x \neq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{3}{4} \\ x \geq \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

Vậy điều kiện xác định của bất phương trình là $x = 1$ hoặc $x = \dfrac{3}{4}$

Thay $x = 1$ hoặc $x = \dfrac{3}{4}$ vào bất phương trình thấy đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{1; \dfrac{3}{4}\right\}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.55: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x-3} < \dfrac{x}{x^2-6x+9}$ b) $\sqrt{x-2} > \dfrac{1}{x+2}$

Bài 4.56: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $2x + \sqrt{2x-1} \geq 2\sqrt{1-2x} + 1$ b) $\sqrt{-x^2+x-1} \leq 2$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} < \sqrt{1-x} + 2$ d) $\sqrt{(x-1)^2(2-x)(x-2)} > -7$

- **DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG.**

1. Phương pháp giải.

Để giải bất phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về bất phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của bất phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương bất phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế của bất phương trình với một biểu thức *luôn dương*(hoặc *luôn âm*) và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được bất phương trình *cùng chiều* (hoặc *ngược chiều*) tương đương với bất phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của bất phương trình (hai vế luôn dương) ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.
- Lập phương hai vế của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$ (*) :

a) $3x+1-\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{x-3}$ b) $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$

Lời giải

Ta có $3x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

a) $3x+1-\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{x-3}$ (1) không tương đương $3x+1>0$ vì $x=3$ là nghiệm của bất phương trình (*) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

b) $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow 3x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ tương đương $3x+1>0$.

Ví dụ 2: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $|x^2+2x|+3\le 0$ b) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}<2$

Lời giải

a) Ta có $|x^2+2x|\ge 0 \Rightarrow |x^2+2x|+3>0$ do đó bất phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXĐ: $x>0$.

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}}}=2$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $\sqrt{|x-1|}+x^2\ge 2x-1$ b) $\frac{1}{x^2+1}-(x+1)^2\le\frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

a) BPT $\Leftrightarrow \sqrt{|x-1|}+x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-1|}+(x-1)^2\ge 0$

Do $\sqrt{|x-1|}\geq 0,\ (x-1)^2\geq 0$ với mọi x nên $\sqrt{|x-1|}+(x-1)^2\geq 0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) BPT $\Leftrightarrow -(x+1)^2\leq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0$ (đúng với mọi x)

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 4: Bạn Nam giải bất phương trình $|x+1|\geq x-1$ như sau

Bất phương trình tương đương với $(x+1)^2\geq (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1\geq x^2-2x+1\Leftrightarrow 4x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[0;+\infty)$.

Theo em ban Nam giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

Lời giải

Bạn Nam đã mắc sai lầm ở phép biến đổi bình phương hai vế

Lời giải đúng là:

- Với $x<1$ ta có $|x+1|\geq 0,\ x-1<0$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $x<1$
- Với $x\geq 1$: Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x\geq 1 \\ (x+1)^2\geq (x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+2x+1\geq x^2-2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 4x\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.57: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$:

a) $3x+1+\dfrac{1}{x+3}>\dfrac{1}{x+3}$ b) $3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}$

Bài 4.58: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\sqrt{x+1}>\sqrt{-x-4}$ b) $\sqrt{x+1}\leq -x^2+x-1$

Bài 4.59: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $|x+1|+2x^2-2x+1>0$ b) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$

Bài 4.60: Bạn Bình giải bất phương trình $\sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+2}-1\right)\geq 0$ như sau

Bất phương trình tương đương với

$\sqrt{2x+2}-1\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{2x+2}\geq 1\Leftrightarrow 2x+2\geq 1\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-\dfrac{1}{2};+\infty)$.

Theo em ban Bình giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.