

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

a) **Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và miền nghiệm của nó.**

- **Bất phương trình bậc nhất hai ẩn** x, y là bất phương trình có một trong các dạng:

$ax + by + c < 0, ax + by + c > 0, ax + by + c \leq 0, ax + by + c \geq 0$ trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ gọi là **một nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c < 0$,

Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$ cũng được định nghĩa tương tự.

- Trong mặt phẳng tọa độ thì mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một điểm và tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một tập hợp điểm. Ta gọi tập hợp điểm ấy là **miền nghiệm** của bất phương trình.

b) Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Định lí: Trong mặt phẳng tọa độ đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta có quy tắc thực hành **biểu diễn hình học tập nghiệm** (hay **biểu diễn miền nghiệm**) như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng $(d): ax + by + c < 0$

Bước 2. Xét một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên (d) .

- Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.
- Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \leq 0$ hoặc $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn, ta có **hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn**.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta gọi tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn mọi bất phương trình trong hệ là **miền nghiệm của hệ**. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch (tô màu) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➤ DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

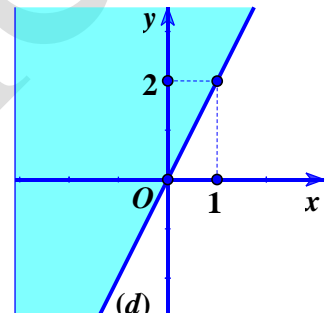
Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x - y \geq 0$

b) $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3}$

Lời giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $(d): 2x - y = 0$. Ta có (d) chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$. Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ (d) và chứa điểm $M(1;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

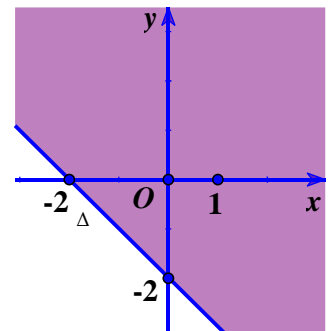


b) Ta có $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3} \Leftrightarrow 3(x-2y) - 2(2x+y+1) > 0$

$\Leftrightarrow -x - 4y - 2 > 0 \Leftrightarrow x + 4y + 2 < 0$

Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $\Delta: x + 4y + 2 = 0$

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ 2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải

a) Vẽ các đường thẳng $(d): x + y - 2 = 0$, $(d'): x - 3y + 3 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ và $x - 3y + 3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng (d) và (d') .

b) Vẽ các đường thẳng $(d): x + y = 0$, $(d'): 2x - 3y + 6 = 0$ và $(d''): x - 2y + 1 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$ ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x + y > 0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng (d'')

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm bất phương trình

$(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0$.

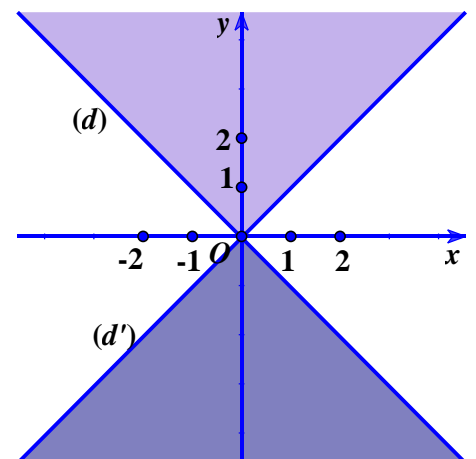
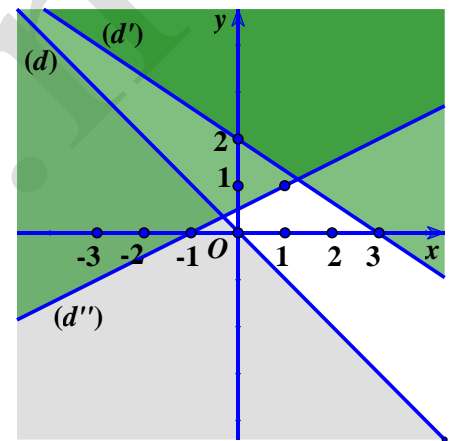
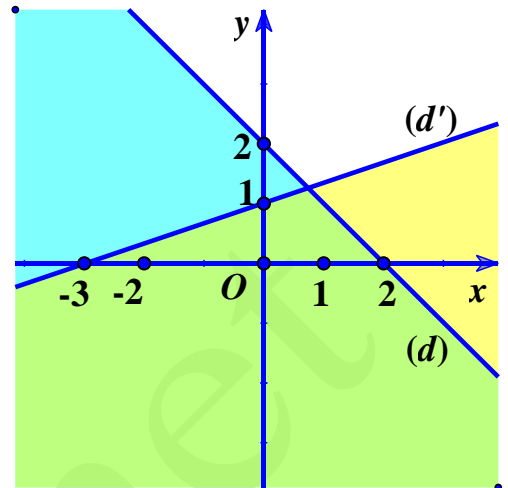
Lời giải

Ta có $(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} (2)$$

Như vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).

Vẽ các đường thẳng $(d): x + y = 0$, $(d'): x - y = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2).



Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \geq 0, y \geq 0$. Hiệu quả chung của quảng cáo là: $x + 6y$.

Bài toán trở thành: Xác định x, y sao cho:

$M(x; y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất.

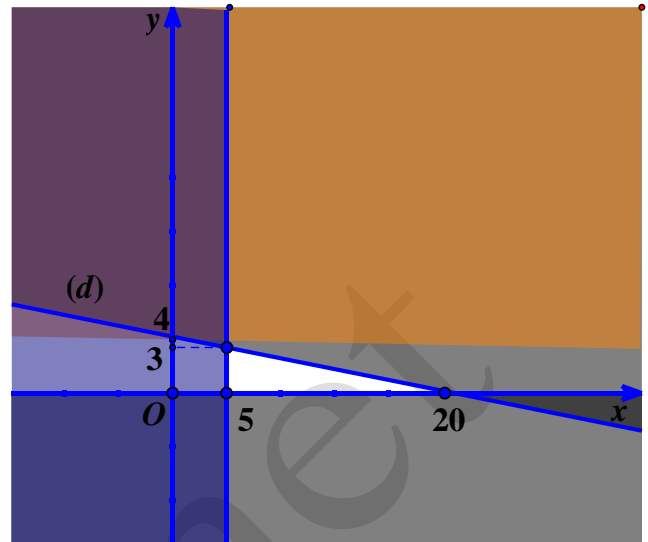
$$\text{Với các điều kiện } \begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*)$$

Trước tiên ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (*)

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng

$$(d): x + 5y - 20 = 0, (d'): x = 5, (d''): y = 4$$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng (tam giác) không tô màu trên hình vẽ



Giá trị lớn nhất của $M(x; y) = x + 6y$ đạt tại một trong các điểm $(5;3), (5;0), (20;0)$

Ta có $M(5;3) = 23, M(5;0) = 5, M(20;0) = 20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x; y)$ bằng 23 tại $(5;3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Lời giải

Phân tích bài toán: Gọi $x (x \geq 0)$ là số kg loại I cần sản xuất, $y (y \geq 0)$ là số kg loại II cần sản xuất.

Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x + 4y$, thời gian là $30x + 15y$ có mức lời là $40000x + 30000y$

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc suy ra $2x + 4y \leq 200$ hay

$$x + 2y - 100 \leq 0, 30x + 15y \leq 1200 \text{ hay } 2x + y - 80 \leq 0.$$

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ (*) sao cho

$$\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$L(x; y) = 40000x + 30000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng

$(d): x + 2y - 100 = 0, (d'): 2x + y - 80 = 0$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng (tứ giác) không tô màu trên hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $L(x; y) = 40000x + 30000y$ đạt tại một trong các điểm $(0; 0), (40; 0), (0; 50), (20; 40)$. Ta có

$L(0; 0) = 0, L(40; 0) = 1600000,$

$L(0; 50) = 1500000, L(20; 40) = 2000000$ suy ra giá trị lớn

nhất của $L(x; y)$ là 2000000 khi $(x; y) = (20; 40)$.

Vậy cần sản xuất 20 kg sản phẩm loại I và 40 kg sản phẩm loại II để có mức lợi lớn nhất.

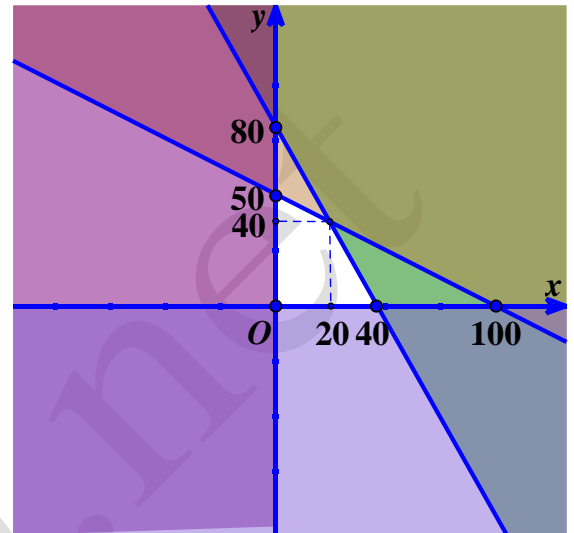
2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.63: Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

Bài 4.64: Nhân dịp tết Trung Thu, Xí nghiệp sản xuất bánh Trăng muốn sản xuất hai loại bánh: Đậu xanh, Bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, Xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mút, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 300kg, đậu là 200kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06kg đường, 0,08kg đậu và cho lãi 2 ngàn đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07kg đường, 0,04kg đậu và cho lãi 1,8 ngàn đồng.

Cần lập kế hoạch để sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị đọng về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

Bài 4.65: Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B₁, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau: Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B₁, một hộp cao Sao



vàng và 6 hộp Quy sâm. Cách thứ hai cắt được 2 hộp B₁, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B₁ tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bì phải dùng là ít nhất?

hoc360.net