§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax+b<0$.

Giải bất phương trình dạng $ax+b<0$ (1)

- Nếu $a=0$ thì bất phương trình có dạng $0.x+b<0$

- Với $b<0$ thì tập nghiệm BPT là S = $\varnothing$
- Với $b\geq 0$ thì tập nghiệm BPT là S = $\mathbb{R}$

- Nếu $a>0$ thì $(1) \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$ suy ra tập nghiệm là $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$
- Nếu $a<0$ thì $(1) \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$ suy ra tập nghiệm là $S=\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$

Các bất phương trình dạng $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$ được giải hoàn toán tương tự

2. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Để giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn ta giải từng bất phương trình của hệ bất phương trình. Khi đó tập nghiệm của hệ bất phương trình là giao của các tập nghiệm từng bất phương trình.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax+b<0$.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình sau.

a) $mx+6\leq 2x+3m$ b) $(x+m)m+x>3x+4$

c) $(m^2+9)x+3\geq m(1-6x)$ d) $m(m^2x+2)<x+m^2+1$

Lời giải

a) Bất phương trình tương đương với $(m-2)x<3m-6$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x\leq 0$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m>2$ bất phương trình tương đương với $x<\frac{3m-6}{m-2}=3$

Với $m<2$ bất phương trình tương đương với $x>\frac{3m-6}{m-2}=3$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x (có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$).

$m>2$ bất phương trình có nghiệm là $x<3$ (có tập nghiệm là $S=(-\infty;3)$)

$m<2$ bất phương trình có nghiệm là $x>3$ (có tập nghiệm là $S=(3;+\infty)$)

b) Bất phương trình tương đương với $(m-2)x>4-m^2$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x>0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>2$ bất phương trình tương đương với $x>\frac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Với $m<2$ bất phương trình tương đương với $x<\frac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình vô nghiệm

$m>2$ bất phương trình có nghiệm là $x>-m-2$

$m<2$ bất phương trình có nghiệm là $x<-m-2$

c) Bất phương trình tương đương với $\left(m+3\right)^2 x \ge m-3$

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x \ge -6$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m \ne -3$ bât phương trình tương đương với $x \ge \dfrac{m-3}{\left(m+3\right)^2}$

Kết luận

$m=-3$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

$m \ne -3$ bât phương trình có nghiệm là $x \ge \dfrac{m-3}{\left(m+3\right)^2}$.

d) Bất phương trình tương đương với $\Leftrightarrow \left(m^3-1\right)x < m^2-2m+1$

$\Leftrightarrow \left(m-1\right)x < \dfrac{\left(m-1\right)^2}{m^2+m+1}$ (vì $m^2+m+1=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$)

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>1$ bât phương trình tương đương với $x<\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Với $m<1$ bât phương trình tương đương với $x>\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình vô nghiệm

$m>1$ bât phương trình có nghiệm là $x<\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

$m<1$ bât phương trình có nghiệm là $x>\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình $\left(m^2-m\right)x+m<6x-2$ vô nghiệm.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-m-6\right)x<-2-m$

Rõ ràng nếu $m^2-m-6 \ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ m \ne 3 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=-2$ bất phương trình trở thành $0x<0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x<-5$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy giá trị cần tìm là $m=-2$ và $m=3$.

Ví dụ 3. Tìm m để bất phương trình $4m^2\left(2x-1\right) \ge \left(4m^2+5m+9\right)x-12m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\left(4m^2-5m-9\right)x \ge 4m^2-12m$

Dễ dàng thấy nếu $4m^2-5m-9 \ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -1 \\ m \ne \dfrac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m=-1$ bất phương trình trở thành $0x \ge 16$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m = \dfrac{9}{4}$ bât phương trình trở thành $0x \geq -\dfrac{27}{4}$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \dfrac{9}{4}$.

Ví dụ 4. Tìm m để bất phương trình $\;4m^2 + 2m + 1\;\; x - 5m \geq 3x - m - 1$ có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\;4m^2 + 2m - 2\;\; x \geq 4m - 1 \Leftrightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1\;\; x \geq 4m - 1$

Với $\;m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ thì bất phương trình vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > \dfrac{1}{4} \Rightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; > 0$ bất phương trình tương đương với $\;x \geq \dfrac{1}{m + 2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{m + 2} = -1 \Leftrightarrow m = -3$ (không thỏa mãn)

Với $-2 < m < \dfrac{1}{4} \Rightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; < 0$ bất phương trình tương đương với $\;x \leq \dfrac{1}{m + 2}$ suy ra $-2 < m < \dfrac{1}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m < -2 \Rightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; > 0$ bất phương trình tương đương với $\;x \geq \dfrac{1}{m + 2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{m + 2} = -1 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn)

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$\;m - 1\;\; x + 2m - 3 \geq 0$ (1) và $\;m + 1\;\; x + m - 4 \geq 0$ (2).

Lời giải

* Với $m = 1$ bất phương trình (1) trở thành $0.x - 1 \geq 0$ (vô nghiệm), bất phương trình (2) trở thành $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m = -1$ bất phương trình (1) trở thành $-2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{2}$, bất phương trình (2) trở thành $0.x - 5 \geq 0$ (nghiệm đúng với mọi x) do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m > 1$ ta có $\;1\;\; \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3 - 2m}{m - 1}$, $\;2\;\; \Leftrightarrow x \geq \dfrac{4 - m}{m + 1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \dfrac{3 - 2m}{m - 1} = \dfrac{4 - m}{m + 1}$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \pm \sqrt{11}$

Đối chiếu với điều kiện $m > 1$ suy ra $m = -2 + \sqrt{11}$.

* Với $-1 < m < 1$ ta có $1 \;\Leftrightarrow x \le \dfrac{3-2m}{m-1},\;\; 2 \;\Leftrightarrow x \ge \dfrac{4-m}{m+1}$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m < -1$ ta có $1 \;\Leftrightarrow x \le \dfrac{3-2m}{m-1},\;\; 2 \;\Leftrightarrow x \le \dfrac{4-m}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \dfrac{3-2m}{m-1} = \dfrac{4-m}{m+1}$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \pm \sqrt{11}$

Đối chiếu với điều kiện $m < -1$ suy ra $m = -2 - \sqrt{11}$

Vậy hai bất phương trình tương đương khi $m = -2 \pm \sqrt{11}$.

2. Các bài tập luyện tập.

Bài 4.66: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x-m) \le x - 1$. b) $3x + m^2 \ge m(x+3)$.

Bài 4.67: a) Tìm m để bất phương trình $mx - 2 \le x - m$ vô nghiệm.

b) Tìm m để bất phương trình $m^2 \;\; x-1 \;\; \ge 9x + 3m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4.68: Cho hàm số $f \;\; x \;\; = \;\; 2m+1 \;\; x - 3m + 2$.

a) Tìm m để phương trình $f \;\; x \;\; = 0$ có nghiệm $x \in \left[0;1\right]$.

b) Tìm m để $f \;\; x \;\; \ge 0$ với mọi $x \in \left[-1;2\right]$.

Bài 4.69: Tìm m để bất phương trình $m \;\; 2x-1 \;\; \ge 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

Bài 4.70: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$2-m \;\; x + 2m + 4 \ge 0$ và $m+1 \;\; x + m^2 - 4 \ge 0$.

➢ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < \;\; x + 2 \;\;^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 1 \le 2x - 3 \\ 3x < x + 5 \\ \dfrac{5-3x}{2} \le x - 3 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với

$\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}<4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{22}{7} \\ x<\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x<\dfrac{7}{4}$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $x<\dfrac{7}{4}$

c) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x<7 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $-1<x<7$.

d) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x\ge 2 \\ x<\dfrac{5}{2} \\ x\ge \dfrac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{11}{5}\le x\le \dfrac{5}{2}$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $\dfrac{11}{5}\le x\le \dfrac{5}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases} 2x-1\le x+2 \\ m\ \ m+1\ \ x+4m\ge\ \ m-2\ \ x+3m^2+6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} m\ \ mx-1\ \ <2 \\ m\ \ mx-2\ \ \ge 2m+1 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x\le 3 \\ m^2+2\ \ x\ge 3m^2-4m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\ge \dfrac{3m^2-4m+6}{m^2+2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{3m^2-4m+6}{m^2+2}\le 3 \Leftrightarrow m\ge 0$.

Vậy $m\ge 0$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x<m+2 \\ m^2x\ge 4m+1 \end{cases}$

Với $m=0$ ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x<2 \\ 0x\ge 1 \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m\ne 0$ ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x<\dfrac{m+2}{m^2} \\ x\ge \dfrac{4m+1}{m^2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m+2}{m^2}>\dfrac{4m+1}{m^2} \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$

Vậy $m<\dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} x-3\ ^2\ge x^2+7x+1 \\ 2m\le 8+5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+1\le x-1 \\ 2\ \ x-3\ \ <5\ \ x-4 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \le \dfrac{8}{13} \\ x \ge \dfrac{2m-8}{5} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{8}{13} < \dfrac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \dfrac{72}{13}$

Vậy $m > \dfrac{72}{13}$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m-1\ \ x \le -2 \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$

Với $m = 1$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x \le -2 \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$ (hệ bpt vô nghiệm)

Với $m > 1$ hệ bất phương trình $\begin{cases} x \le \dfrac{-2}{m-1} \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow \dfrac{-2}{m-1} \le \dfrac{14}{3} \Leftrightarrow -6 \le 14\ \ m-1\ \ \Leftrightarrow m \ge \dfrac{4}{7}$

Do đó $m > 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m < 1$ hệ bất phương trình $\begin{cases} x \ge \dfrac{-2}{m-1} \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$ (hệ bpt luôn có nghiệm)

Vậy giá trị cần tìm là $m \ge 1$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m\ \ x+1\ \ \ge x+3 \\ 4mx+3 \ge 4x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} 2m-1\ \ x \ge 3-2m \\ 4m-4\ \ x \ge -3 \end{cases}$

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{3-2m}{2m-1} = \dfrac{-3}{4m-4}$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$

Với $m = \dfrac{3}{4}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}-1\right)x \ge 3 - \dfrac{3}{2} \\ -x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Với $m = \dfrac{5}{2}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 4x \ge -2 \\ 6x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị cần tìm là $m=\dfrac{3}{4}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.71: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{4x-5}{7}<x+3\\ \dfrac{3x+8}{4}>2x-5\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{4}{3}-12x\le x+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{4x-3}{2}<\dfrac{2-x}{3}\end{cases}$

c) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}\le x+\dfrac{4}{3}\\ \dfrac{2x-9}{3}\ge\dfrac{19+x}{2}\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{11-x}{2}\ge 2x-5\\ 2\ \ 3x+1\ \ \ge\dfrac{x-8}{2}\end{cases}$

Bài 4.72: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases}4\ \ x-3\ \ +1\le 3\ \ x-3\\ x+m>1\end{cases}$ b) $\begin{cases}2\ \ x+5\ \ <3(x+4)\\ -3x-8\ge 5\ \ x-8\\ m\ \ x+2\ \ <\ \ m+1\ \ x+m-2\end{cases}$

Bài 4.73: Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases}2x+7\ge 8x+1\\ m+5<2x\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x+5\ge x-1\\ \ \ x+2\ \ ^2\le\ \ x-1\ \ ^2+9\\ mx+1>\ \ m-2\ \ x+m\end{cases}$

Bài 4.74: Tìm m để phương trình $15x^2-11xy+2y^2=-7$ có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases}x<y\\ 2m^2x+3my<0\end{cases}$.

- **DẠNG TOÁN 3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình $\dfrac{mx-m+1}{x-1}>0$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ne 1$

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x>1\\ mx-m+1>0\end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases}x<1\\ mx-m+1<0\end{cases}$ (4)

+ TH1: $m>0$ ta có (3) $\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x>\dfrac{1-m}{m}\end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x<\dfrac{1-m}{m}\end{cases}$

Nếu $\dfrac{1-m}{m}>1\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>\dfrac{1-m}{m}$ và (4) $\Leftrightarrow x<1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\ \ -\infty;1\ \ \cup\left(\dfrac{1-m}{m};+\infty\right)$

Nếu $\dfrac{1-m}{m}=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>1$ và (4) $\Leftrightarrow x<1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R} \setminus \ 1$

Nếu $\dfrac{1-m}{m} < 1 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x > 1$ và (4) $\Leftrightarrow x < \dfrac{1-m}{m}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-m}{m}\right) \cup \ 1; +\infty$

+ TH2: $m = 0$ ta có (3) trở thành $\begin{cases} x > 1 \\ 0x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$, (4) trở thành $\begin{cases} x < 1 \\ 0x + 1 < 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \ 1; +\infty$

+ TH3: $m < 0$ ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \dfrac{1-m}{m} \end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \dfrac{1-m}{m} \end{cases}$

Nếu $\dfrac{1-m}{m} > 1 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x \in \left(1; \dfrac{1-m}{m}\right)$ và (4) $\Leftrightarrow x \in \ -\infty; 1 \ \cup \left(\dfrac{1-m}{m}; +\infty\right)$

Suy ra với $m < 0$ nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; \dfrac{1-m}{m}\right\}$

Kết luận

$0 < m < \dfrac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \ -\infty; 1 \ \cup \left(\dfrac{1-m}{m}; +\infty\right)$

$m = \dfrac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S} = \mathbb{R} \setminus \ 1$

$m > \dfrac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(-\infty; \dfrac{1-m}{m}\right) \cup \ 1; +\infty$

$m = 0$ tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S} = \ 1; +\infty$

$m < 0$ tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S} = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \dfrac{1-m}{m}\right\}$

Ví dụ 2: Cho bất phương trình $\sqrt{\ m^2 - 4 \ x - m + 3} > 2$.

a) Giải bất phương trình khi $m = 1$

b) Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

Lời giải

a) Khi $m = 1$ bất phương trình trở thành $\sqrt{-3x + 2} > 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2 \geq 0 \\ -3x + 2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{2}{3}$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S} = (-\infty; -\dfrac{2}{3}]$

b) ĐKXĐ: $\ m^2 - 4 \ x - m + 3 \geq 0$ (*)

Giả sử bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thì khi đó (*) đúng mọi x

Suy ra $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Với $m = 2$ ta có bất phương trình trở thành $\sqrt{0.x - 2 + 3} > 2$ (vô nghiệm)

Với $m = -2$ ta có bất phương trình trở thành $\sqrt{0.x + 2 + 3} > 2$ (đúng với mọi x)

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-2m+2) \geq 0$

a) Giải bất phương trình khi $m = 2$

b) Tìm m để mọi $x \in [2;3]$ đều là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Lời giải

a) Khi $m = 2$ bất phương trình trở thành $\sqrt{x-1}(x-2) \geq 0$

Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = \ 1 \ \cup [2;+\infty)$.

b) Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2m+2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2m-2 \end{cases} \end{array}\right.$

+ TH1: $2m-2 > 1 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \geq 2m-2 \end{array}\right.$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = \ 1 \ \cup [2m-2;+\infty)$.

Do đó mọi $x \in [2;3]$ đều là nghiệm của bất phương trình (*)

$\Leftrightarrow [2;3] \subset S \Leftrightarrow 2m-2 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 2$

Suy ra $\frac{3}{2} < m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $2m-2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 1$

Suy ra $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $2m-2 < 1 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 1$

Suy ra $m < \frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị cần tìm là $m \leq 2$.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của m để

a) Bất phương trình $mx + 4 > 0$ (1) nghiệm đúng với mọi $|x| < 8$

b) Bất phương trình $\frac{mx}{x^2+1} - 2m - 3 < 0$ (2) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$

Lời giải

a) *Cách 1:* Ta có $\left|x\right| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8 \Leftrightarrow x \in \left(-8;8\right)$

+ TH1: $m > 0$ ta có (1)$\Leftrightarrow mx > -4 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S = \left(-\dfrac{4}{m};+\infty\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $\left|x\right| < 8$ khi và chỉ khi

$\left(-8;8\right) \subset S \Leftrightarrow -\dfrac{4}{m} \le -8 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2}$

Suy ra $0 < m \le \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $m = 0$ khi đó bất phương trình (1) trở thành $0.x + 4 > 0$(đúng với mọi x)
Do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $m < 0$ ta có (1)$\Leftrightarrow mx > -4 \Leftrightarrow x < -\dfrac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S = \left(-\infty;-\dfrac{4}{m}\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $\left|x\right| < 8$ khi và chỉ khi

$\left(-8;8\right) \subset S \Leftrightarrow -\dfrac{4}{m} \ge 8 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}$

Suy ra $-\dfrac{1}{2} \le m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $-\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $\left|x\right| < 8$ khi và chỉ khi
$mx + 4 > 0,\ \forall x \in \left(-8;8\right)$

Xét hàm số $f\left(x\right) = mx + 4$. Ta biết đồ thị là một đường thẳng do đó

$f(x) = mx + 4 > 0,\ \forall x \in \left(-8;8\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \ge 0 \\ f(8) \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \ge 0 \\ 8m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{1}{2} \\ m \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{2}$

Vậy $-\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Đặt $t = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ bất phương trình trở thành $mt - 2m - 3 < 0$

Với $x > 0$ ta có $\dfrac{x}{x^2 + 1} \le \dfrac{x}{2\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{2}$ khi đó $0 < t \le \dfrac{1}{2}$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$ khi và chỉ khi bất phương trình

$mt-2m-3<0$ đúng với mọi $t \in (0;\frac{1}{2}] \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-3 \le 0 \\ \frac{1}{2}m-2m-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\frac{3}{2} \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge -\frac{3}{2}$

Vậy $m \ge -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét : Bất phương trình $f(x) = ax+b>0, \forall x \in [\alpha;\beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)>0 \\ f(\beta)>0 \end{cases}$, Bất phương trình

$f(x) = ax+b>0, \forall x \in (\alpha;\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \ge 0 \\ f(\beta) \ge 0 \end{cases}$. Các trường hợp khác tương tự.

Ví dụ 5: Cho phương trình $(m+1)x^2-(4m+3)x+4m+1=0$ (1). Tìm m để phương trình (1)

a) Có một nghiệm lớn hơn 2 và một nghiệm nhỏ hơn 2.

b) Có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2

Lời giải

Đặt $y=x-2 \Rightarrow x=y+2$ khi đó phương trình (1) trở thành

$(m+1)(y+2)^2-(4m+3)(y+2)+4m+1=0$

$\Leftrightarrow (m+1)y^2+4(m+1)y+4(m+1)-(4m+3)y-2(4m+3)+4m+1=0$

$\Leftrightarrow (m+1)y^2+y-1=0$ (2)

a) Phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2 một nghiệm nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm trái

+ TH1: Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

TH2: Với $m \ne -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai do đó nó có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow P<0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m+1}<0 \Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$

Vậy với $m>-1$ thì phương trình (1)

b) Ta có phương trình (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có ít nhất một nghiệm dương.

- Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán
- Với $m \ne -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai

+ TH1: Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4(m+1)>0 \\ -\frac{1}{m+1}>0 \\ -\frac{1}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{5}{4} \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4}<m<-1$$

+ TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m>-1$ (theo câu a)

+ TH3: Phương trình (2) có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4(m+1) = 0 \\ -\dfrac{1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{4} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{4}$$

+ TH4: Phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng không

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{m+1} > 0 \\ -\dfrac{1}{m+1} = 0 \\ 1 + 4(m+1) > 0 \end{cases}$$ (không tồn tại giá trị nào của m)

Vậy $m \geq -\dfrac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Để so sánh nghiệm phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với số thực α ta đặt $y = x - \alpha$ và quy về việc xét dấu nghiệm của phương trình bậc hai

2. Bài tập luyện tập

Bài 4.75: Giải và biện luận bất phương trình $\dfrac{2x + m - 1}{x + 1} > 0$

Bài 4.76: Tìm điều kiện của m để phương trình $2x^2 + \ 2m - 1 \ x + m - 1 = 0$

a) Có hai nghiệm khác dấu

b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm

c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương

d) Có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

Bài 4.77: Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{4 - x}\left[\ m^2 + 1 \ x - 5m^2\right] \leq 0$

Bài 4.78: a) Với giá trị nào của m thì bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;3)$.

b) Cho bất phương trình $\left(1 + \dfrac{4x}{1 + x^2}\right)m + \dfrac{2x}{1 + x^2} < 3$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

c) Với điều kiện nào của a, b thì bất phương trình $a\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + b \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \neq 0$.

Bài 4.79: Tìm m để phương trình $(x^2 - 2x)^2 - 2m(x^2 - 2x) + m + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.