BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa :

Cho a, b là hai số thực. Các mệnh đề "$a > b$", "$a < b$", "$a \ge b$", "$a \le b$" được gọi là những *bất đẳng thức*.

- Chứng minh bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng(mệnh đề đúng)
- Với A, B là mệnh đề chứ biến thì "$A > B$" là mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (với điều kiện nào đó) nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến "$A > B$" đúng với tất cả các giá trị của biến(thỏa mãn điều kiện đó). Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến là số thực.

2. Tính chất :

* $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$
* $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
* $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$
* Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$
Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$
* $a > b \ge 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$
* $a \ge b \ge 0 \Leftrightarrow a^2 \ge b^2$
* $a > b \ge 0 \Rightarrow a^n > b^n$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

* $-|a| \le a \le |a|$ với mọi số thực a .
* $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (Với $a > 0$)
* $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right.$ (Với $a > 0$)

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) Đối với hai số không âm

Cho $a \ge 0, b \ge 0$, ta có $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Hệ quả :
* Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi hai số đó bằng nhau
* Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau

b) Đối với ba số không âm

Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$, ta có $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN.**

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức(BĐT) $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

b) $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

c) $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

d) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Lời giải

a) Ta có $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$. Đẳng thức $\Leftrightarrow a=b$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

c) BĐT tương đương $3(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

d) BĐT tương đương $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a, b, c, d, e. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$.

Lời giải

Ta có : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)=$

$=(\dfrac{a^2}{4}-ab+b^2)+(\dfrac{a^2}{4}-ac+c^2)+(\dfrac{a^2}{4}-ad+d^2)+(\dfrac{a^2}{4}-ae+e^2)$

$=(\dfrac{a}{2}-b)^2+(\dfrac{a}{2}-c)^2+(\dfrac{a}{2}-d)^2+(\dfrac{a}{2}-e)^2 \geq 0 \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b=c=d=e=\dfrac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1} \geq \dfrac{2}{1+ab}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}-\dfrac{2}{1+ab}=(\dfrac{1}{a^2+1}-\dfrac{1}{1+ab})+(\dfrac{1}{b^2+1}-\dfrac{2}{1+ab})$

$=\dfrac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)}+\dfrac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)}=\dfrac{a-b}{1+ab}(\dfrac{b}{1+b^2}-\dfrac{a}{1+a^2})=\dfrac{a-b}{1+ab}.\dfrac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)}$

$=\dfrac{a-b}{1+ab}\dfrac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)}=\dfrac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)}\geq 0$ (Do $ab\geq 1$).

Nhận xét : Nếu $-1<b\leq 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\leq\dfrac{2}{1+ab}$.

Ví dụ 4: Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $x^4+3\geq 4x$ b) $x^4+5>x^2+4x$ c) $x^{12}+x^4+1>x^9+x$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-4x+3\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x-3)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+3)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(x+1)^2+1\right]\geq 0$ (đúng với mọi số thực x)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-x^2-4x+5>0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1+x^2-4x+4>0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2+(x-2)^2>0$

Ta có $(x^2-1)^2\geq 0,(x-2)^2\geq 0 \Rightarrow (x^2-1)^2+(x-2)^2\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-1=0\\x-2=0\end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2-1)^2+(x-2)^2>0$ ĐPCM.

c) Bất đẳng thức tương đương với $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$

+ Với $x<1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x)$

Vì $x<1$ nên $1-x>0, 1-x^5>0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

+ Với $x\geq 1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1$

Vì $x\geq 1$ nên $x^3-1\geq 0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

Vậy ta có $x^{12}+x^4+1>x^9+x$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $a^4+b^4-4ab+2\geq 0$

b) $2\ \ a^4+1\ \ +\ \ b^2+1\ ^2\geq 2\ \ ab+1\ ^2$

c) $3\ \ a^2+b^2\ \ -ab+4\geq 2\ \ a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$

Lời giải

a) BĐT tương đương với $\ \ a^4+b^4-2a^2b^2\ \ +\ \ 2a^2b^2-4ab+2\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow\ \ a^2-b^2\ ^2+2\ \ ab-1\ ^2\geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

b) BĐT tương đương với $2\ \ a^4+1\ \ +\ \ b^4+2b^2+1\ \ -2\ \ a^2b^2+2ab+1\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(2a^2-4ab+2b^2\right)+\left(a^4-4a^2+1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+2(a-b)^2+(a^2-1)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

c) BĐT tương đương với $6\left(a^2+b^2\right)-2ab+8-4\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[a^2-4a\sqrt{b^2+1}+4\left(b^2+1\right)\right]+\left[b^2-4b\sqrt{a^2+1}+4\left(a^2+1\right)\right]+\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a-2\sqrt{b^2+1}\right)^2+\left(b-2\sqrt{a^2+1}\right)^2+\left(a-b\right)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 6: Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x\ge y$. Chứng minh rằng;

a) $4\left(x^3-y^3\right)\ge\left(x-y\right)^3$

b) $x^3-3x+4\ge y^3-3y$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương $4\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x-y\right)^3\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[4\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x-y\right)^2\right]\ge 0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[3x^2+3xy+y^2\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x-y\right)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]\ge 0$ (đúng với $x\ge y$) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

b) Bất đẳng thức tương đương $x^3-y^3\ge 3x-3y-4$

Theo câu a) ta có $x^3-y^3\ge\frac{1}{4}\left(x-y\right)^3$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$\frac{1}{4}\left(x-y\right)^3\ge 3x-3y-4$ (*), Thật vậy,

BĐT (*) $\Leftrightarrow \left(x-y\right)^3-12\left(x-y\right)+16\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y-2\right)\left[\left(x-y\right)^2+2\left(x-y\right)-8\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y-2\right)^2\left(x-y+4\right)\ge 0$ (đúng với $x\ge y$)

Đẳng thức xảy không xảy ra.

Loại 2: Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

$a\in\left[\alpha;\beta\right]\Rightarrow\left(a-\alpha\right)\left(a-\beta\right)\le 0 \quad (*)$

$a,b,c\in\left[\alpha;\beta\right]\Rightarrow\left(a-\alpha\right)\left(b-\alpha\right)\left(c-\alpha\right)+\left(\beta-a\right)\left(\beta-b\right)\left(\beta-c\right)\ge 0 \quad (**)$

Ví dụ 7 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :

$a+b>c\Rightarrow ac+bc>c^2$. Tương tự

$bc+ba>b^2;\quad ca+cb>c^2$ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm

Nhận xét : ***** Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.
Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT $|a-b|<c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 8 : Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh : $a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2c^2\ge a^2+b^2+c^2$ (*)

Ta có : $a^2b^2c^2\ge 0$; $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^2b+b^2c+c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$ đpcm.

Cách 2: BĐT cần chứng minh tương đương với $a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le 1$

Mà $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow a^2\le a, b^2\le b, c^2\le c$ do đó

$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$

Ta chỉ cần chứng minh $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$

Thật vậy: vì $a,b,c\in[0;1]$ nên theo nhận xét $(**)$ ta có

$$abc+(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$$

$$\Leftrightarrow a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$$

vậy BĐT ban đầu được chứng minh

Ví dụ 9 : Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

$$2(1+a+b+c+ab+bc+ca)+abc\ge 0.$$

Lời giải

Vì $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a,b,c\in[-1;1]$ nên ta có :

$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc\ge 0$ (*)

Mặt khác : $\dfrac{(1+a+b+c)^2}{2}\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca\ge 0$ (**)

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng nếu $a\ge 4, b\ge 5, c\ge 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$ thì $a+b+c\ge 16$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a<9, b<8, c\le 7$ do đó áp dụng $(*)$ ta có

$(a-4)(a-9)\le 0$, $(b-5)(b-8)\le 0$, $(c-6)(c-7)\le 0$ nhân ra và cộng các BĐT cùng chiều lại ta được:

$a^2+b^2+c^2-13(a+b+c)+118\le 0$ suy ra

$a+b+c\ge\dfrac{1}{13}(a^2+b^2+c^2+118)=16$ vì $a^2+b^2+c^2=90$

vậy $a+b+c\ge 16$ dấu "=" xảy ra khi $a=4, b=5, c=7$

Ví dụ 11: Cho ba số $a,\ b,\ c$ thuộc $[-1;1]$ và không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng

$\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\geq 2$

Lời giải

Vì ba số a, b, c thuộc $\left[-1;1\right]$ nên $0\leq a^2, b^2, c^2\leq 1$

Suy ra $(1-b^2)(1+b^2-a^4)\geq 0 \Leftrightarrow a^4+b^4-a^4b^2\leq 1$ (*)

Mặt khác $a^4\geq a^{2012}, b^4\geq b^{2012}$ đúng với mọi a, b thuộc $\left[-1;1\right]$

Suy ra $a^4+b^4-a^4b^2\geq a^{2012}+b^{2012}-a^4b^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $a^{2012}+b^{2012}\leq a^4b^2+1$ hay $\dfrac{a^4b^2+c^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\geq 1$

Tương tự ta có $\dfrac{b^4c^2+a^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\geq 1$ và $\dfrac{c^4a^2+b^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\geq 1$

Cộng vế với ta được $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\geq 3$

Hay $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\geq 2$ ĐPCM.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.0. Cho các số thực a, b, c là số thực. Chứng minh rằng:

a) $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ b) $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$

c) $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$ d) $a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc-ca)$

Bài 4.1: Cho a,b,c,d là số dương.. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$ với $\dfrac{a}{b}<1$. b) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

c) $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

d) $2<\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+d}+\dfrac{c+d}{c+d+a}+\dfrac{d+a}{d+a+b}<3$

Bài 4.2: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $(ax+by)(bx+ay)\geq(a+b)^2xy$ (với $a,b>0;\ x,y\in R$) .

b) $\dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}}\geq\dfrac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$. với $a>b>0;\ c>\sqrt{ab}$.

c) $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}\geq 4$ với $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

d) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>a^3+b^3+c^3$ với a,b,c là ba cạnh của tam giác

Bài 4.3: Cho $x\geq y\geq z\geq 0$. Chứng minh rằng:

a) $xy^3+yz^3+zx^3\geq xz^3+zy^3+yx^3$

b) $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}\geq\dfrac{x^2z}{y}+\dfrac{y^2x}{z}+\dfrac{z^2y}{x}$.

Bài 4.4: Cho bốn số dương $a,\ b,\ c,\ d$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}.$$

Bài 4.5: Cho $a,b,c \in [1;3]$ và thoả mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \le 14$

➢ **DẠNG TOÁN 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY(côsi) ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRI LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích

* Điều kiện xảy ra dấu '=' là các số bằng nhau

* Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

Đối với hai số: $x^2+y^2\ge 2xy;\quad x^2+y^2\ge \dfrac{(x+y)^2}{2};\quad xy\le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2.$

Đối với ba số: $abc\le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3},\ abc\le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a,b là số dương thỏa mãn $a^2+b^2=2$. Chứng minh rằng

a) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge 4$ b) $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}}=2,\ \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}.\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge \dfrac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2=a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab\Rightarrow ab\le 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge 4$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Ta có $(a+b)^5=(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2+2ab+b^2\ge 2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}=4\sqrt{ab}$ và

$(a^3+3ab^2)+(3a^2b+b^3)\ge 2\sqrt{(a^3+3ab^2)(3a^2b+b^3)}=4\sqrt{ab(1+b^2)(a^2+1)}$

Suy ra $(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)\ge 16ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Do đó $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\ge 8$

b) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c)\ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

d) $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le a^3+b^3+c^3$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}},\ b+\frac{1}{c}\ge 2\sqrt{\frac{b}{c}},\ c+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}}$

Suy ra $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\ge 8\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{\frac{c}{a}}=8$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$1+a^2\ge 2\sqrt{a^2}=2a$, tương tự ta có $1+b^2\ge 2b,\ 1+c^2\ge 2c$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b+b^2c+c^2a\ge 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a}=3abc$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

c) Ta có $(1+a)(1+b)(1+c)=1+\left(ab+bc+ca\right)+\left(a+b+c\right)+abc$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$ và $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

Suy ra $(1+a)(1+b)(1+c)\ge 1+3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2+3\sqrt[3]{abc}+abc=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

d) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$a^2\sqrt{bc}\le a^2\left(\frac{b+c}{2}\right),\ b^2\sqrt{ac}\le b^2\left(\frac{a+c}{2}\right),\ c^2\sqrt{ab}\le c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Suy ra $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le\frac{a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b}{2}$ (1)

Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b\le\frac{a^3+a^3+b^3}{3},\ b^2a\le\frac{b^3+b^3+a^3}{3},\ a^2c\le\frac{a^3+a^3+c^3}{3},$

$c^2a\le\frac{c^3+c^3+a^3}{3},\ b^2c\le\frac{b^3+b^3+c^3}{3},\ c^2b\le\frac{c^3+c^3+b^3}{3}$

Suy ra $a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b\le 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le a^3+b^3+c^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c,d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$

b) $\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\right)\left(a+b\right)\left(b+c\right)\ge 16$

c) $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 4.$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+b\geq 2\sqrt{ab}, c+d\geq 2\sqrt{cd}$ và $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\geq 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}=2\sqrt[4]{abcd}$

Suy ra $\dfrac{a+b+c+d}{4}\geq\dfrac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$ ĐPCM.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

b) Áp dụng câu a) ta có

$\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{d^3}+\dfrac{d}{a^3}\geq 4\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3}.\dfrac{b}{c^3}.\dfrac{c}{d^3}.\dfrac{d}{a^3}}=\dfrac{4}{\sqrt{abcd}}$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{d^3}+\dfrac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d)\geq\dfrac{4}{\sqrt{abcd}}.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd}=16$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

c) Áp dụng câu a) ta có

$VT=3.\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 4\sqrt[4]{\left(\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=4\sqrt[4]{\dfrac{8(a+b+c}{27(a+b)(b+c)(}}$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $4\sqrt[4]{\dfrac{8(a+b+c)^3}{27(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq 4$

$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3\geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$ (*)

Áp dụng BĐT côsi cho ba số ta có

$(a+b)(b+c)(c+a)\leq\left(\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3=\dfrac{8(a+b+c)^3}{27}$

Suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: BĐT câu a) là bất đẳng côsi cho bốn số không âm. Ta có BĐT côsi cho n số không âm như sau: Cho n số không âm a_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Khi đó ta có $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $a^2b+b^2c+c^2a\leq 3$

b) $\dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}+\dfrac{ca}{3+b^2}\leq\dfrac{3}{4}$

Lời giải

a) Ta có $(a^2+b^2+c^2)^2=9\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2b^2=9$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$, $b^4+c^4\geq 2b^2c^2$, $c^4+a^4\geq 2c^2a^2$

Cộng vế với vế lại ta được $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leq 3$ (3)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2 + a^2b^2 \ge 2\sqrt{a^2.a^2b^2} = 2a^2b$, tương tự ta có $b^2 + b^2c^2 \ge 2b^2c$, $c^2 + c^2a^2 \ge 2c^2a$

Cộng vế với vế ta được $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge 2\ \ a^2b + b^2c + c^2a$ (4)

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b + b^2c + c^2a \le 3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$3 + a^2 = 3 +\ \ 3 - b^2 - c^2\ \ =\ \ 3 - b^2\ \ +\ \ 3 - c^2\ \ \ge 2\sqrt{\ 3 - b^2\ \ \ 3 - c^2\ }$

$$\Rightarrow \frac{bc}{3 + a^2} \le \frac{bc}{2\sqrt{\ 3 - b^2\ \ \ 3 - c^2\ }} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{3 - c^2}.\frac{c^2}{3 - b^2}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{3 - c^2} + \frac{c^2}{3 - b^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2}\right)$$

Tương tự ta có $\dfrac{ab}{3 + c^2} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a^2}{a^2 + c^2} + \dfrac{b^2}{b^2 + c^2}\right)$, $\dfrac{ca}{3 + b^2} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{c^2}{c^2 + b^2} + \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}\right)$

Cộng vế với vế ta được $\dfrac{ab}{3 + c^2} + \dfrac{bc}{3 + a^2} + \dfrac{ca}{3 + b^2} \le \dfrac{3}{4}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Loại 2: Kĩ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x + y + z \ge a + b + c$ (hoặc $xyz \ge abc$), ta thường đi chứng minh $x + y \ge 2a$ (hoặc $ab \le x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 5: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} \ge a + b + c$ b) $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} \ge \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{bc}{a}} = 2b$

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} \ge 2c$, $\dfrac{ac}{b} + \dfrac{ba}{c} \ge 2a$.

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$2\left(\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b}\right) \ge 2\ \ a + b + c\ \ \Leftrightarrow \dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} \ge a + b + c$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{1}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}.\dfrac{1}{a}} = \dfrac{2}{b}$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{c^2} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{2}{c}$, $\dfrac{c}{a^2} + \dfrac{1}{c} \ge \dfrac{2}{a}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \ge \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{c} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} \ge \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3b^3}{c}+\dfrac{b^3c^3}{a}+\dfrac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$

b) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge 3$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{a^3b^3}{c}+\dfrac{b^3c^3}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a^3b^3}{c}.\dfrac{b^3c^3}{a}}=2b^3ac$

Tương tự ta có $\dfrac{b^3c^3}{a}+\dfrac{c^3a^3}{b}\ge 2abc^3$, $\dfrac{c^3a^3}{b}+\dfrac{a^3b^3}{c}\ge 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\dfrac{a^3b^3}{c}+\dfrac{b^3c^3}{a}+\dfrac{c^3a^3}{b}\right)\ge 2abc\;\; a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^3b^3}{c}+\dfrac{b^3c^3}{a}+\dfrac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$. ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)^2\ge 9$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2+\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2+\left(\dfrac{ca}{b}\right)^2+2\;\; a^2+b^2+c^2\;\;\ge 9\Leftrightarrow \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2+\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2+\left(\dfrac{ca}{b}\right)^2\ge 3$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2+\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2\ge 2\sqrt{\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2.\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2}=2b^2$

Tương tự ta có $\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2+\left(\dfrac{ca}{b}\right)^2\ge 2c^2$, $\left(\dfrac{ca}{b}\right)^2+\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2\ge 2a^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2+\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2+\left(\dfrac{ca}{b}\right)^2\ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $8\;\; a+b\;\;\; b+c\;\;\; c+a\;\;\le\;\; 3+a\;\;\; 3+b\;\;\; 3+c$

b) $\;3-2a\;\;\; 3-2b\;\;\; 3-2c\;\;\le abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a+b\;\;\; b+c\;\;\le\left(\dfrac{a+b\;\;+\;\;b+c}{2}\right)^2=\dfrac{3+a\;\;^2}{4}$$

Tương tự ta có $\;b+c\;\;\; c+a\;\;\le\dfrac{3+c\;\;^2}{4}$, $\;c+a\;\;\; a+b\;\;\le\dfrac{3+a\;\;^2}{4}$

Nhân vế với vế lại ta được $\left[\;a+b\;\;\; b+c\;\;\; c+a\;\right]^2\le 64\left[\;3+a\;\;\; 3+b\;\;\; 3+c\;\right]^2$

Suy ra $8\;\; a+b\;\;\; b+c\;\;\; c+a\;\;\le\;\; 3+a\;\;\; 3+b\;\;\; 3+c$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) * TH1: Với $3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c \;\le 0$: BĐT hiển nhiên đúng.

* TH2: Với $3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c \;> 0$:

+ Nếu cả ba số $3-2a$, $3-2b$, $3-2c$ đều dương. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$3-2a \quad 3-2b \;\le \left(\frac{3-2a \; + \; 3-2b}{2}\right)^2 = c^2$$, tương tự ta có

$3-2b \quad 3-2c \;\le a^2$, $3-2c \quad 3-2a \;\le b^2$

Nhân vế với vế ta được $\left[\;3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c\;\right]^2 \le a^2b^2c^2$

Hay $3-2a \quad 3-2b \quad 3-2c \;\le abc$.

+ Nếu hai trong ba số $3-2a$, $3-2b$, $3-2c$ âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a<0,\, 3-2b<0$ suy racó $6-2a-2b<0 \Leftrightarrow c<0$ (không xảy ra)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 8: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}}=a.$$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4}\ge b;\ \dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4}\ge c$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta đươc :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Lưu ý :Việc ta ghép $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng vế trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\dfrac{a^2}{b+c}$ khi đó ta sẽ áp dụng BĐT côsi cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở BĐT côsi là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ khi đó $\dfrac{a^2}{b+c}=\dfrac{a}{2}$ và $b+c=2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 9: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{b+1}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+1}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+1}}\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\dfrac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\dfrac{c^3}{a+3}}\ge\dfrac{3}{2}$

Lời giải

a) Đặt $P=\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{\sqrt{2}a\ \ b+1}{4}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{\sqrt{2}a\ \ b+1}{4}}=\frac{3\sqrt{2}a}{2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{\sqrt{2}b\ \ c+1}{4}\geq\frac{3\sqrt{2}b}{2},\ \frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{2}c\ \ a+1}{4}\geq\frac{3\sqrt{2}c}{2}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được

$$2P+\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ ab+bc+ca+a+b+c\ \ \geq\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \ a+b+c$$

$$\Leftrightarrow P\geq\frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ \ ab+bc+ca\quad(\text{vì } a+b+c=3)$$

Mặt khác ta có $\ a+b+c\ ^2\geq 3\ \ ab+bc+ca$ (theo ví dụ 1)

Do đó $ab+bc+ca\leq 3$

Suy ra $\Leftrightarrow P\geq\frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}.3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Đặt $Q=\sqrt{\frac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a+3}}$

Ta có $Q=\frac{a^2}{\sqrt{a\ \ b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{b\ \ c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{c\ \ a+3}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $4\sqrt{a\ \ b+3}=2\sqrt{4a\ \ b+3}\leq 4a+b+3$

Suy ra $\frac{a^2}{\sqrt{a\ \ b+3}}\geq\frac{4a^2}{4a+b+3}$, tương tự ta có

$$\frac{b^2}{\sqrt{b\ \ c+3}}\geq\frac{4b^2}{4b+c+3},\ \frac{c^2}{\sqrt{c\ \ a+3}}\geq\frac{4c^2}{4c+a+3}$$

Cộng vế với vế lại ta được $Q\geq\frac{4a^2}{4a+b+3}+\frac{4b^2}{4b+c+3}+\frac{4c^2}{4c+a+3}=L$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{4a^2}{4a+b+3}+\frac{1}{16}\ \ 4a+b+3\ \ \geq 2\sqrt{\frac{4a^2}{4a+b+3}.\frac{1}{16}\ \ 4a+b+3}=a$$

Tương tự ta có

$$\frac{4b^2}{4b+c+3}+\frac{1}{16}\ \ 4b+c+3\ \ \geq b,\ \frac{4c^2}{4c+a+3}+\frac{1}{16}\ \ 4c+a+3\ \ \geq c$$

Cộng vế với vế lại ta được $L+\frac{1}{16}\left[5\ \ a+b+c\ \ +9\right]\geq a+b+c$

Vì $a+b+c=3$ nên $L \geq \dfrac{3}{2}$ suy ra $Q \geq \dfrac{3}{2}$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 10: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \geq 2(a+b+c).$$

Lời giải

Ta có $\left[(a-1)(b-1)\right]\left[(b-1)(c-1)\right]\left[(c-1)(a-1)\right]=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0$

Do đó không mất tính tổng quát giả sử

$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow 2(ab+c+1) \geq 2(a+b+c)$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+3 \geq 2(ab+c+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1 \geq 2(ab+c)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} \geq \dfrac{2}{ab}=2c$, $\dfrac{1}{c^2}+1 \geq \dfrac{2}{c}=2ab$ (do $abc=1$)

Cộng vế với vế ta được $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+1 \geq 2(ab+c)$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x>2$

b) $g(x)=2x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ với $x>-1$

c) $h(x)=x+\dfrac{3}{x}$ với $x \geq 2$

d) $k(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ với $0<x \leq \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}=x-2+\dfrac{1}{x-2}+2$

Do $x>2$ nên $x-2>0$, $\dfrac{1}{x-2}>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$x-2+\frac{1}{x-2} \geq 2\sqrt{(x-2).\frac{1}{x-2}}=2$$

Suy ra $f(x) \geq 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x-2=\dfrac{1}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại) hoặc $x=3$ (thỏa mãn)

Vậy $\min f(x)=4$ khi và chỉ khi $x=3$.

b) Do $x>-1$ nên $x+1>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$g(x)=(x+1)+(x+1)+\frac{1}{(x+1)^2}-2 \geq 3\sqrt[3]{(x+1).(x+1).\frac{1}{(x+1)^2}}-2=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^3=1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy $\min g(x)=1$ khi và chỉ khi $x=0$.

c) Ta có $h(x)=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\right)+\dfrac{x}{4}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{x}.\dfrac{3x}{4}}=3$

Mặt khác $x\geq 2$ suy ra $h(x)=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\right)+\dfrac{x}{4}\geq 3+\dfrac{2}{4}=\dfrac{7}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x}{4}\\ x=2\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy $\min h(x)=\dfrac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x=2$.

d) Ta có $k(x)=x+x+\dfrac{1}{8x^2}+\dfrac{7}{8x^2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $x+x+\dfrac{1}{8x^2}\geq 3\sqrt[3]{x.x.\dfrac{1}{8x^2}}=\dfrac{3}{2}$

Mặt khác $0<x\leq \dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{7}{8x^2}\geq \dfrac{7}{2}$ suy ra $k(x)\geq \dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}=5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{8x^2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min k(x)=5$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Loại 3: Kĩ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra(để tách ghép cho hợp lí) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 12: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=(1+2a)(1+2bc)$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2+m^2\geq 2ma\Rightarrow 2a\leq \dfrac{a^2}{m}+m$ (với $m>0$)

Do b,c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b=c$ nên ta đánh giá $2bc\leq b^2+c^2$. Suy ra $A\leq \left(\dfrac{a^2}{m}+m+1\right)(1+b^2+c^2)=B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng $xy\leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ để là xuất hiện $a^2+b^2+c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B=\frac{1}{m}\left(a^2+m^2+m\right)\left(1+b^2+c^2\right)\le\frac{1}{m}\left(\frac{\left(a^2+m^2+m\right)+\left(1+b^2+c^2\right)}{2}\right)^2$$

Suy ra $A\le\frac{1}{4m}\left(m^2+m+2\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a=m,\ b=c, a^2+m^2+m=1+b^2+c^2$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Từ đây ta có $m=\frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\frac{4}{9}\ge\frac{4}{3}a\Rightarrow 2a\le\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}$ và $2bc\le b^2+c^2$

Suy ra $A\le\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)=\frac{3}{2}\left(a^2+\frac{10}{9}\right)\left(b^2+c^2+1\right)\le\frac{3}{2}\left(\frac{a^2+\frac{10}{9}+b^2+c^2+1}{2}\right)^2=\frac{98}{27}$$

Suy ra $A\le\frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=c\\a^2+\frac{10}{9}=b^2+c^2+1\\a^2+b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=c=\sqrt{\frac{5}{18}}\end{cases}$

Vậy $\max A=\frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a=\frac{2}{3}$ và $b=c=\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 13: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $2a+4b+3c^2=68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a^2+b^2+c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a+4b+3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm vào các tham số vào và đánh giá như sau (m,n,p dương)

$a^2+m^2\ge 2am,\ b^2+n^2\ge 2bn$ và $\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+4p^3\ge 3pc^2$

Suy ra $a^2+b^2+c^3+m^2+n^2+4p^3\ge 2am+2bn+3pc$ (*)

Để $2am+2bn+3pc^2$ có thể bội số của $2a+4b+3c^2$ thì

$\frac{2m}{2}=\frac{2n}{4}=\frac{3p}{3}\Leftrightarrow m=\frac{n}{2}=p$

Mặt khác dấu bằng ở BĐT (*) xảy ra khi $a=m,b=n,c=2p$

Hay $a=m,b=2m,c=2m\Rightarrow 2m+4.\left(2m\right)+3\left(2m\right)^2=68$

$\Leftrightarrow 12m^2 + 10m - 68 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (nhận) hoặc $m = -\dfrac{17}{6}$ (loại)

Suy ra $p = 2, n = 4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bĐT côsi ta có

$a^2 + 4 \geq 4a,\ b^2 + 16 \geq 8b$ và $\dfrac{c^3}{2} + \dfrac{c^3}{2} + 32 \geq 6c^2$

Cộng vế với vế ta được

$a^2 + b^2 + c^3 + 52 \geq 4a + 8b + 6c^2$, kết hợp với $2a + 4b + 3c^2 = 68$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^3 \geq 84$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 4, c = 4$

Vậy $\min \mathrm{A} = 84 \Leftrightarrow a = 2, b = 4, c = 4$.

Ví dụ 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A = \dfrac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1 - x^3}}$ với $x < 1$

b) $B = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ với $-2 \leq x \leq 5$.

Lời giải

a) Ta có $A = \dfrac{x^2 - x + 3}{\sqrt{\;1 - x \quad x^2 + x + 1\;}}$

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$\sqrt{\;1 - x \quad x^2 + x + 1\;} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\;\;1 - x\;}.\sqrt{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2\;\;1 - x \;\; + x^2 + x + 1}{2} = \frac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra $A \geq \dfrac{x^2 - x + 3}{\dfrac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\;\;1 - x \;\; = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Vậy $\min\limits_{x<1} \mathrm{A} = 2\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

b) Ta có $B = \dfrac{x + 11}{\sqrt{-x^2 + 4x + 21} + \sqrt{-x^2 + 3x + 10}} = \dfrac{x + 11}{\sqrt{(x + 3)(7 - x)} + \sqrt{(x + 2)(5 - x)}}$

Với $-2 \leq x \leq 5$ thì $x + 11$; $x + 3$; $7 - x$; $x + 2$; $5 - x$ là các số không âm nên theo BĐT côsi ta có :

$$\sqrt{(x + 3)(7 - x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x + 6)(7 - x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x + 6) + (7 - x)}{2}\right) = \frac{x + 13}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x + 2)(5 - x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x + 4)(5 - x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x + 4) + (5 - x)}{2}\right) = \frac{x + 9}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{(x + 3)(7 - x)} + \sqrt{(x + 2)(5 - x)} \leq \dfrac{x + 11}{\sqrt{2}}$, từ đó ta có $B \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$(1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min_{-2\le x\le 5} B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Loại 4: Kĩ thuật côsi ngược dấu.

Ví dụ 15: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} .$$

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a+2\sqrt{bc}}\right) \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right)$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{a+b+c}\right)$, $\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$P \le \frac{1}{2}\left(3 - \frac{a}{a+b+c} - \frac{b}{a+b+c} - \frac{c}{a+b+c}\right) = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Ví dụ 16: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$.

b) $\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a\ \ 1+b^2\ - b^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \ge a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+c^2} \ge b - \frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2} \ge c - \frac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có $\ a+b+c\ ^2 \ge 3\ ab+bc+ca\ \Rightarrow ab+bc+ca \le 3$.

Do đó $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^3} = \frac{a\ \ a+2b^3\ - 2ab^3}{a+2b^3} \ge a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+2c^3} \ge b - \frac{2c\sqrt[3]{b}}{3}$, $\frac{c^2}{c+2a^3} \ge c - \frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge a+b+c-\frac{2}{3}\ b\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{c^2}+c\sqrt[3]{b^2}$$

Mặt khác $a+b+c=3$ do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$b\sqrt[3]{a^2}\le\frac{1}{3}b.\ a+a+1\ =\frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2}\le\dfrac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2}\le\dfrac{2ca+a}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}=\frac{2}{3}\ ab+bc+ca\ +\frac{1}{3}\ a+b+c$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\dfrac{2}{3}.3+\dfrac{1}{3}.3=3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 17: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{c}{1+ab}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{a}{1+bc}\ge 1$

Lời giải

Đặt $P=\dfrac{c}{1+ab}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{a}{1+bc}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{c}{1+ab}=c-\frac{abc}{1+ab}\ge c-\frac{abc}{2\sqrt{ab}}=c-\frac{\sqrt{ca\quad cb}}{2}\ge c-\frac{ca+cb}{4}$$

Tương tự ta ta có $\dfrac{b}{1+ac}\ge b-\dfrac{ba+bc}{4}$, $\dfrac{a}{1+bc}\le a-\dfrac{ab+ac}{4}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$P\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow\ \ a+b+c\ ^2=1+2\ \ ab+bc+ca$ (*)

Hay $ab+bc+ca=\dfrac{a+b+c\ ^2-1}{2}$

Suy ra $P\ge a+b+c-\dfrac{a+b+c\ ^2-1}{4}=\dfrac{(a+b+c-1)(3-a-b-c)}{4}+1$ (1)

Từ giả thiết ta có $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow 3-a-b-c\ge 0$ (2)

Và từ (*) suy ra $a+b+c\ge 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P\ge 1$. ĐPCM

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.6: Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng $\dfrac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\dfrac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\dfrac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$.

Bài 4.7: Cho các số dương *x, y, z* thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

Bài 4.8: Với các số dương *a, b, c, d* sao cho: $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c} + \dfrac{d}{1+d} = 1$

Chứng minh rằng: $abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Bài 4.9: Với các số dương *a, b, c* sao cho: $\dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+c} + \dfrac{c}{1+a} = 1$

Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{1+b}{a} - 1\right)\left(\dfrac{1+c}{b} - 1\right)\left(\dfrac{1+a}{c} - 1\right) \geq 8$

Bài 4.10: Cho ba số dương x, y, z thoả mãn hệ thức $xyz \;\; x+y+z \;\; = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \;\; x \; + \; y \;\; x \; + \; z \;\; .$

Bài 4.11: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \dfrac{3}{2}$.

Bài 4.12: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$\dfrac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \dfrac{1}{2}$.

Bài 4.13: Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng $1 + \dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$.

Bài 4.14: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a \;\; 1+b} + \dfrac{1}{b \;\; 1+c} + \dfrac{1}{c \;\; 1+a} \geq \dfrac{3}{2}$

Bài 4.15: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{a+b}{2ab}} + \sqrt{\dfrac{b+c}{2bc}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{2ca}} \geq 3$.

Bài 4.16: Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)\left(1 + \dfrac{b}{c}\right)\left(1 + \dfrac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Bài 4.17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}} + \sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}} + \sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}$$

Bài 4.18: Với các số dương *a, b, c*, chứng minh rằng:

a) $a^3+b^3+c^3 \ge ab^2+bc^2+ca^2$ b) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge ab+bc+ca$

c) $\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3} \ge \frac{a^4}{c}+\frac{b^4}{a}+\frac{c^4}{b}$

Bài 4.19: Với các số dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3 \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4.20: Với các số dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $4\ \ a+b+c\ \ =3abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \ge \frac{3}{8}$

Bài 4.21: Với các số dương *a, b,* c. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{b\ \ b+c}+\frac{b^3}{c\ \ c+a}+\frac{c^3}{a\ \ a+b} \ge \frac{1}{2}\ \ a+b+c$

b) $\frac{a^3}{b+2c\ \ ^2}+\frac{b^3}{c+2a\ \ ^2}+\frac{c^3}{a+2b\ \ ^2} \ge \frac{2}{9}\ \ a+b+c$

Bài 4.22: Cho x, y, z dương thỏa mãn và $xyz=1$. Chứng minh rằng :

$$x^3+y^3+z^3 \ge x+y+z.$$

Bài 4.23: Cho a, b, c dương và $a+b+c=1$.Chứng minh rằng:

$$9(a^4+b^4+c^4) \ge a^2+b^2+c^2.$$

Bài 4.24: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng :

$$(1+\frac{1}{x})^4+(1+\frac{1}{y})^4+(1+\frac{1}{z})^4 \ge 768.$$

Bài 4.25: Cho a, b dương thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2} \ge 6$ b) $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab}+4ab \ge 11$ c) $\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right) \ge \frac{289}{16}$

Bài 4.26: Cho hai số thực dương a, b. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Bài 4.27: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \ge \frac{3}{2}$$

Bài 4.28: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8} \ge \frac{1}{9}+\frac{2}{27}\ \ xy+yz+zx$$

Bài 4.29: Cho a,b,c dương . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\geq\frac{1}{5}\ \ a+b+c$$

Bài 4.30: Cho ba số thực dương x,y,z . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}\geq 9$$

Bài 4.31: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc\geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leq\sqrt{2}\ \ a+b+c$$

Bài 3.32: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\geq\ \ a+b+c\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\ \ b+c^{\ \ 3}}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\ \ c+a^{\ \ 3}}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+\ \ a+b^{\ \ 3}}}\geq 1$

Bài 3.33: Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3$. Chứng minh rằng $xy+yz+zx-xyz\leq 2$.

Bài 3.34: Cho a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $M=a^3+64b^3+c^3$

Bài 3.35: Cho x,y,z dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm GTNN của $P=x^2+2y^2+3z^2$

Bài 3.36: Cho a,b,c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $a^3+2b^3+3c^3\geq\frac{6}{7}$

Bài 3.37: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}=\frac{4}{3}$. Chứng minh rằng $x+y+z\geq 1$

Bài 3.38: Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\geq\frac{1}{9}(64c-a-b)$

Bài 3.39: Cho x,y,z dương thỏa mãn $y^2+yz+z^2=1-\frac{3x^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\ \ x+y+z$.

Bài 3.40: Cho x,y,z dương thỏa mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$

Bài 3.41: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+y+z=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}.$$

➢ DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC.

1. Phương pháp giải.
Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x = f(a,b,c), y = g(a,b,c), z = h(a,b,c)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t = f(a;b;c)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.
2. Các ví dụ minh họa.
Ví dụ 1: Cho các số dương a,b,c.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{6b+8c}{2a+b}+\dfrac{3a+2b+c}{b+c}\geq 7$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+4a}+\dfrac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải
a) Đặt $x=a+b+c,\ y=2a+b,\ z=b+c$

Suy ra $a=x-z,\ b=-2x+y+2z,\ c=2x-y-z$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{-x+y+z}{x}+\dfrac{4x-2y+4z}{y}+\dfrac{x+y}{z}\geq 7$

$\Leftrightarrow -1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{4x}{y}-2+\dfrac{4z}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}\geq 7$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\right)+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)+\left(\dfrac{4z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\geq 10$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geq 4,\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\geq 2,\ \dfrac{4z}{y}+\dfrac{y}{z}\geq 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x=z \\ 2z=y \end{cases} \Leftrightarrow 2x=y=2z$ suy ra không tồn tại $a,b,c.$

Dấu đẳng thức không xảy ra.
b) Đặt $x=a+b+c,\ y=b+c+4a,\ z=c+a+16b$

Suy ra $a=\dfrac{y-x}{3},\ b=\dfrac{z-x}{15},\ c=\dfrac{21x-5y-z}{15}$

Khi đó ta có $P=\dfrac{-6x+5y+z}{15x}+\dfrac{4x-y}{3y}+\dfrac{16x-z}{15z}$

$\Rightarrow P=\dfrac{y}{3x}+\dfrac{4x}{3y}+\dfrac{z}{15y}+\dfrac{16x}{15z}-\dfrac{4}{5}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{3x}+\dfrac{4x}{3y}\geq \dfrac{4}{3},\ \dfrac{z}{15y}+\dfrac{16y}{15z}\geq \dfrac{8}{15}$

Suy ra $P\geq \dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{15}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x=2y=z \Leftrightarrow a=\dfrac{5b}{3}=\dfrac{5c}{7}$

Vậy $\min P=\dfrac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a=\dfrac{5b}{3}=\dfrac{5c}{7}$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\ge\sqrt{\frac{b+c}{p-a}}+\sqrt{\frac{c+a}{p-b}}+\sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$$

Lời giải

Đặt $x=p-a;\ y=p-b;\ z=p-c$ suy ra $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$.

Do a,b,c là ba cạnh của tam giác nên x,y,z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}\le\left(2+\frac{y+z}{x}\right)+4=\frac{y+z}{x}+6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}\le\frac{z+x}{y}+6,\ 4\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\le\frac{x+y}{z}+6$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\right)\le\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18\right)$

$\Leftrightarrow\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$.

Ta có $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2,\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đều.

Nhận xét : Đối với BĐT có giả thiết a,b,c là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ $x=\frac{a+b-c}{2},\ y=\frac{a-b+c}{2},\ z=\frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$ và x,y,z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x,y,z dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 3: Cho x,y,z là số dương. Chứng minh rằng $x^3+2y^3+3z^3\ge\frac{1590}{1331}\ x+y+z\ ^3$

Lời giải

Ta có BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3+2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3+3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3\geq$

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z}, b=\frac{y}{x+y+z}, c=\frac{z}{x+y+z} \Rightarrow a,b,c$ dương và $a+b+c=1$

BĐT trở thành $a^3+2b^3+3c^3\geq\frac{1590}{1331}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^3+\left(\frac{6}{11}\right)^3+\left(\frac{6}{11}\right)^3\geq\frac{18}{11}a$, $2b^3+2\left(\frac{3}{11}\right)^3+2\left(\frac{3}{11}\right)^3\geq\frac{18}{11}b$, $3c^3+3\left(\frac{2}{11}\right)^3+3\left(\frac{2}{11}\right)^3\geq\frac{18}{11}c$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$a^3+2b^3+3c^3+\frac{588}{1331}\geq\frac{18}{11}\ \ a+b+c\ \ =\frac{18}{11}$

Suy ra $a^3+2b^3+3c^3\geq\frac{1590}{1331}$.

Nhận xét: Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi BĐT là đồng bậc(Người ta gọi là phương pháp chuẩn hóa)

Ví dụ 4: Cho x,y,z là số dương thỏa mãn $x+y+z\leq\frac{3}{2}$

Chứng minh rằng $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{15}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ và $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$ nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$

Suy ra $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x+y+z+\frac{9}{x+y+z}$

Đặt $t=x+y+z\Rightarrow 0<t\leq\frac{3}{2}$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $x+y+z+\frac{9}{x+y+z}=t+\frac{9}{t}\geq\frac{15}{2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$t+\frac{9}{t}=t+\frac{9}{4t}+\frac{27}{4t}\geq 2\sqrt{t.\frac{9}{4t}}+\frac{27}{4.\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1 \Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca$

Áp dụng BĐT côsi ta có $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

Suy ra $4=abc+ab+bc+ca \geq abc+3\sqrt[3]{(abc)^2}=t^3+3t^2$, với $t=\sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow t^3+3t^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$

Cũng theo BĐT côsi ta có

$P=a+b+c+\dfrac{4}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt[3]{abc}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $P \geq 3t+\dfrac{4}{t}=\left(3t+\dfrac{3}{t}\right)+\dfrac{1}{t}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $3t+\dfrac{3}{t} \geq 2\sqrt{3t.\dfrac{3}{t}}=6$, mặt khác $t \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{t} \geq 1$

Do đó $P \geq 3t+\dfrac{4}{t} \geq 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy $\min P=7 \Leftrightarrow a=b=c=1$

Ví dụ 6: Cho $x,\ y,\ z$ dương thỏa mãn $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2+14xyz}{4(x+y+z)^2+15xyz}$

Lời giải

Ta có $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=8 \Leftrightarrow 8xyz=1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+14xyz=(x+y+z)^2+2(x+y+z)+2 \quad (1)$

Áp dụng BĐT côsi ta có: $8=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right) \geq \dfrac{8}{\sqrt{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $P \leq \dfrac{(x+y+z)^2+2(x+y+z)+2}{4(x+y+z)^2+15}=\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}$ với $x+y+z=t>0$.

Xét $\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-t^2+6t-9}{12t^2+45}=-\dfrac{(t-3)^2}{12t^2+45} \leq 0$

Suy ra $\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15} \leq \dfrac{1}{3}$ do đó $P \leq \dfrac{1}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=3$ hay $x=y=z=1$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.42: Cho x,y,z dương , CMR $\dfrac{25x}{y+z}+\dfrac{4y}{z+x}+\dfrac{9z}{x+y}>12$

Bài 4.43: Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{a+b+2c}+\frac{b+3c}{2a+b+c}-\frac{8c}{a+b+3c}\geq 12\sqrt{2}-17$$

Bài 4.44: Cho $x,\ y,\ z$ là các số dương thoả mãn $xyz\geq x+y+z+2$. Chứng minh rằng $x+y+z\geq 6$.

Bài 4.45: Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^{11}}{bc}+\dfrac{b^{11}}{ca}+\dfrac{c^{11}}{ab}+\dfrac{3}{a^2b^2c^2}\geq\dfrac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$

Bài 4.46: Cho x,y,z là số không âm thoatr mãn $x^2+y^2+z^2+xyz=4$. Chứng minh rằng $x+y+z\leq 3$.

Bài 4.47: Cho x,y,z là số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Bài 4.48: Cho $x,y,z\in(0;1)$ và $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\geq\dfrac{3}{4}$

Bài 4.49: Cho các số thực x,y thỏa $x\neq -2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{(2x^2+13y^2-xy)^2-6xy+9}{(x+2y)^2}.$$

➢ DẠNG 4: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge \frac{a+b+c}{abc}$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le \frac{1}{abc}$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

BĐT tương đương với $a^3+b^3-a^2b-b^2a\ge 0 \Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$ (đúng với mọi $a>0,b>0$)

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

a) Ta có $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a \Leftrightarrow \frac{a}{b^3}+\frac{1}{a^2}\ge \frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}, \frac{c}{a^3}+\frac{1}{c^2}\ge \frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge \frac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc}\le \frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$

Tương tự : $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le \frac{a}{abc(a+b+c)}$; $\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le \frac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a,b là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $3(a+b+1)^2+1\ge 3ab$.

b) $64a^3b^3(a^2+b^2)^2\le (a+b)^6$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $ab\le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh $3(a+b+1)^2+1\ge \frac{3}{4}(a+b)^2$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 9(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 0 \Leftrightarrow (3a+3b+4)^2\ge 0$ (đúng) ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=-\frac{2}{3}$.

b) Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab \le 0$.

Xét $ab > 0$. Áp dụng BĐT $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ ta có

$$64a^3b^3(a^2+b^2)^2 = 16ab\left[2ab(a^2+b^2)\right]^2 \le 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\right]^2 = (a+b)^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2+b^2)^2 \le (a+b)^6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 3: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{2a^3+a+1}{a^2} - 2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(ad = bc)$.

Ta có $(a^2+b^2)(1+4) = 25 \ge (a+2b)^2 \Leftrightarrow a+2b \le 5$

Suy ra $-2b \ge a-5$

Do đó $P = \dfrac{2a^3+a+1}{a^2} - 2b \ge \dfrac{2a^3+a+1}{a^2} + a - 5 = 3a + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} - 5$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$, $a + a + \dfrac{1}{a^2} \ge 3$

Do đó $3a + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} \ge 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy sa $P \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1,\ b = 2$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow a = 1,\ b = 2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức Cho $2n$ số $a_1, a_2, .., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \ge 3$

b) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ này hai lần ta có :

$a^4+b^4+c^4 = (a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \ge$

$\ge ab.bc + bc.ca + ca.ab = abc(a+b+c) = 3abc$ (vì $a+b+c=3$)

Suy ra $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{abc} \ge 3$ hay $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

b) Áp dụng $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ ta có $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{3}{abc}$

Do đó ta cần chứng minh $\dfrac{3}{abc}\ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow abc\ \ a^2+b^2+c^2\ \ \le 3$ (*)

Lại áp dụng $\ a+b+c\ ^2\ge 3\ \ ab+bc+ca$ (ví dụ 1) ta có

$$ab+bc+ca\ ^2\ge 3abc\ \ a+b+c\ \Rightarrow abc\le\frac{ab+bc+ca\ ^2}{9}\text{ (**)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $abc\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ và (**) ta có

$$abc\ \ a^2+b^2+c^2\ \ \le\frac{ab+bc+ca\ ^2\ \ a^2+b^2+c^2}{9}\le\frac{1}{9}\left(\frac{a+b+c\ ^2}{3}\right)^3=3$$

Vậy BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM..
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{2a+2b+c}+\dfrac{1}{a+b+2c}\le\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$

b) $\dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{1}{b+3c}+\dfrac{1}{c+3a}\ge\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{a+2b+c}+\dfrac{1}{a+b+2c}$

lời giải
Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab}\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$$

Suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.
a) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})\le\frac{1}{16}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Tương tự ta có $\dfrac{1}{a+2b+c}\le\dfrac{1}{16}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c})$; $\dfrac{1}{a+b+2c}\le\dfrac{1}{16}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c})$
Cộng ba BĐT trên ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
b) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+b+2c}\ge\frac{4}{2a+4b+2c}=\frac{2}{a+2b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{2a+b+c}\ge\frac{2}{a+b+2c};\ \ \frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{2}{2a+b+c}$$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
Ví dụ 6: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\le\frac{3}{4}$.

b) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array}\right\}\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (*) . Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

a) Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 3-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{4}$.

Áp dụng BĐT (*) ta có $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{a+b+c+3}=\frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác : $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=9$$

Suy ra : $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 9+21=30$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là các số thuộc $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{2}{4b^4+5}+\frac{3}{4c^4+5}=\frac{6}{7}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=ab^2c^3$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

Với x,y thuộc $[0,1]$, ta luôn có $\frac{1}{4x^4+5}+\frac{1}{4y^4+5}\le\frac{2}{4x^2y^2+5}$ (*)

Thật vậy, BĐT (*)

$\Leftrightarrow \quad 2x^4+2y^4+5 \quad 4x^2y^2+5 \ \le \ 4x^4+5 \quad 4y^4+5$

$\Leftrightarrow 8x^4y^4-10x^2y^2+ \quad x^4+y^4 \quad 5-4x^2y^2 \quad \ge 0$

$\Leftrightarrow (5-4x^2y^2)(x^2-y^2)^2 \ge 0$ (đúng với $x,y \in [0,1]$)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Áp dụng BĐT (*) ta có: $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{1}{4c^4+5} \le \dfrac{2}{4a^2c^2+5}, \dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{1}{4c^4+5} \le \dfrac{2}{4b^2c^2+5}$

Suy ra $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{2}{4c^4+5} \le \dfrac{2}{4a^2c^2+5}+\dfrac{2}{4b^2c^2+5} \le \dfrac{4}{4abc^2+5}$ (1)

Và $\dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{1}{7} \le \dfrac{2}{4.\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}+5}, \dfrac{1}{c^4+5}+\dfrac{1}{7} \le \dfrac{2}{4.\dfrac{c^2}{\sqrt{2}}+5}$

Suy ra $\dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{1}{4c^4+5}+\dfrac{2}{7} \le \dfrac{2}{4.\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}+5}+\dfrac{2}{4.\dfrac{c^2}{\sqrt{2}}+5} \le \dfrac{4}{4.\dfrac{bc}{\sqrt{2}}+5}$ (2)

Ta lại có $\dfrac{4}{4abc^2+5}+\dfrac{4}{4.\dfrac{bc}{\sqrt{2}}+5} \le \dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{2}{4b^4+5}+\dfrac{3}{4c^4+5}+\dfrac{2}{7} \le \dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$

Kết hợp giả thiết suy ra $\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5} \ge \dfrac{8}{7} \Rightarrow ab^2c^3 \le \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{16}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.50: Cho *a, b, x, y* $\in R$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (1)

Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho a, b ≥ 0 thoả $a+b=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \ge \sqrt{5}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$.

c) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}.$$

d) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{223 + x^2} + \sqrt{223 + y^2} + \sqrt{223 + z^2}.$$

Bài 4.51: Cho a, b dương. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$; với a, b, c > 0.

b) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c}\right)$; với a, b, c > 0.

c) Cho a, b, c > 0 thoả $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$

d) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với a, b, c > 0.

e) Cho x, y, z dương thoả mãn $x + 2y + 4z = 12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6$.

f) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Bài 4.52: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$ với a, b, c dương

b) $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{4}$. Với a, b, c dương thoả $a + b + c = 1$.

c) $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$. Với a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq 1$

d) $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670$. Với a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$

Bài 4.53: Cho $a, b, c \geq 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ac} \leq 1.$$

Bài 4.54: Cho ba số thực không âm a, b, c và không có hai số đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$