§2 TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng hai vectơ

a) Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}\,;\,\vec{b}$. Từ điểm A tùy ý vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ rồi từ B

vẽ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}\,;\,\vec{b}$.

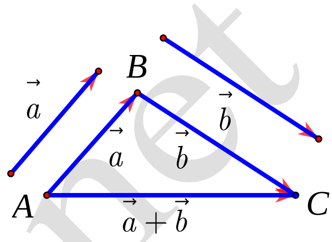
Kí hiệu $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ (Hình 1.9)

b) Tính chất :

+ Giao hoán : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

+ Kết hợp : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

+ Tính chất vectơ – không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a},\ \forall\vec{a}$



Hình 1.9

2. Hiệu hai vectơ

a) Vectơ đối của một vectơ.

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng và cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$

Kí hiệu $-\vec{a}$

Như vậy $\vec{a}+\ -\vec{a}\ =\vec{0},\ \forall\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

b) Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$.

Kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\ -\vec{b}$

3. Các quy tắc:

Quy tắc ba điểm : Cho A, B ,C tùy ý, ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Quy tắc hình bình hành : Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Quy tắc về hiệu vectơ : Cho O , A , B tùy ý ta có : $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

Chú ý: Ta có thể mở rộng quy tắc ba điểm cho n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ thì

$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1: Xác định độ dài tổng, hiệu của các vectơ.

1. Phương pháp giải.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vectơ

- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vectơ và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vectơ đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lí Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vectơ đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $ABC = 30^0$ và $BC = a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.10)

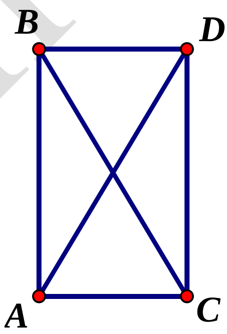
Theo quy tắc ba điểm ta có

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Mà $\sin ABC = \dfrac{AC}{BC}$

$$\Rightarrow AC = BC.\sin ABC = a\sqrt{5}.\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$



Hình 1.10

- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Ta có

$$AC^2+AB^2=BC^2 \Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{5a^2-\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = a\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

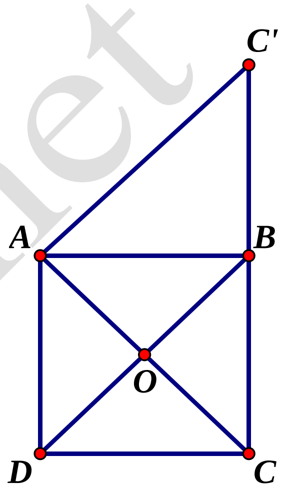
a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|, \left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.



Hình 1.11

Áp dụng định lí Pitago ta có

$AC^2=AB^2+BC^2=2a^2 \Rightarrow AC=\sqrt{2}a$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{2}$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$ suy ra

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$

Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ suy ra

$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2}$ suy ra

$\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=a\sqrt{2}$

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$\vec{u}=\ \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\ +\ \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\ =\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác $ADBC'$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song)

suy ra $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC'}$

Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{CC'}\right|=BC+BC'=a+a=2a$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.14: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Bài 1.15: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|, \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

Bài 1.16: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BCD = 60^0$. Gọi O là tâm hình thoi.

Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$.

Bài 1.17: Cho bốn điểm A, B, C, O phân biệt có độ dài ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ cùng bằng a và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

a) Tính các góc AOB, BOC, COA

b) Tính $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}\right|$

Bài 1.18: Cho góc Oxy . Trên Ox, Oy lấy hai điểm A, B . Tìm điều kiện của A,B sao cho $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ nằm trên phân giác của góc Oxy .

DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vectơ ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vectơ.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Biến đổi vế trái ta có

$$VT = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}$$
$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$
$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}$$
$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP$$ ĐPCM

b) Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

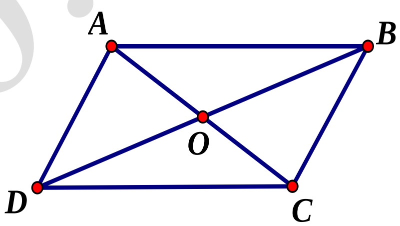
$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.



Hình 1.12

Lời giải (Hình 1.12)

a) Ta có

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$$
$$= -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ suy ra

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$$
$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành)

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC,\ CA,\ AB$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN\,//\,BM$, $MN\,//\,BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

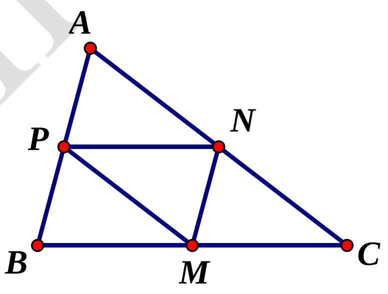
$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\ \overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\ +\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$



Hình 1.13

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\ \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\ +\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\ +\ \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}$

$=\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\ +\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

$=\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\ -\ \overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.19: Cho bốn điểm A,B,C,D. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$

Bài 1.20: Cho các điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$

Bài 1.21: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}$

Bài 1.22: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BC}$

Bài 1.23: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

Bài 1.24: Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

Bài 1.25: Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.