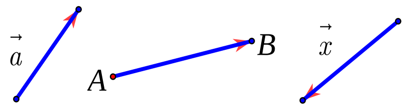
CHƯƠNG I: VECTƠ

§1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa vectơ:

Vectơ là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.



Hình 1.1

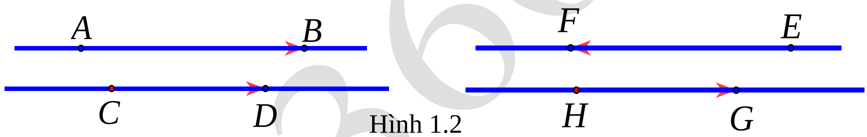
Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B ta kí hiệu : $\overrightarrow{AB}$

Vectơ còn được kí hiệu là: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,...

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Kí hiệu là $\vec{0}$

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng.

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là *giá* của vectơ
- Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là hai vectơ *cùng phương*
- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.



Hình 1.2

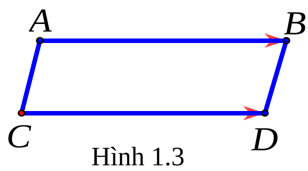
Ví dụ: Ở hình vẽ trên trên (hình 2) thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng còn $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{HG}$ ngược hướng.

Đặc biệt: vectơ – không cùng hướng với mọi véc tơ.

3. Hai vectơ bằng nhau

- Độ dài đoạn thẳng AB gọi là độ dài véc tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.



Hình 1.3

- Hai *vectơ bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Ví dụ: (hình 1.3) Cho hình bình hành $ABCD$ khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- **DẠNG 1: Xác định một vectơ; phương, hướng của vectơ; độ dài của vectơ**

1. Phương pháp giải.

- Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa
- Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn $A,\ B$ ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh $A,\ B,\ C,\ D$ của ngũ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ba điểm A,B,C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Nếu A,B,C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A,B,C nên $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB.

a) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A,B.

Lời giải (Hình 1.4)

a) Các vectơ khác vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{BP},\ \overrightarrow{PB}$.

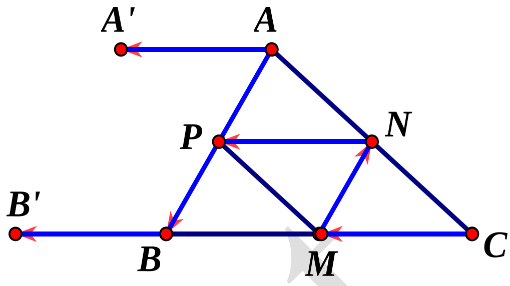
b) Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vectơ có điểm đầu là B và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ có điểm đầu là A và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

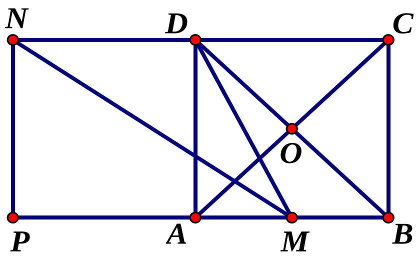


Hình 1.4

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của vectơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có



Hình 1.5

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.1: Cho ngũ giác $ABCDE$**.** Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Bài 1.2: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Tìm các vectơ từ 5 điểm A, B, C, D, O

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$

b) Có độ dài bằng $\left|\overrightarrow{OB}\right|$

Bài 1.3: Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

a) Khi nào thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ?

b) Khi nào thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ?

Bài 1.4: Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì có nhận xét gì về ba điểm A, B, C

b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì có nhận xét gì về bốn điểm A, B, C, D

Bài 1.5: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O . Hãy cho biết khẳng định nào sau đây đúng ?

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$ e) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ f) $2\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$

Bài 1.6: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho

a) Bằng với $\overrightarrow{AB}$ b) Ngược hướng với $\overrightarrow{OC}$

Bài 1.7: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Bài 1.8: Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

Bài 1.9: Cho trước hai điểm A, B phân biệt . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$.

DẠNG 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN // AC$ và

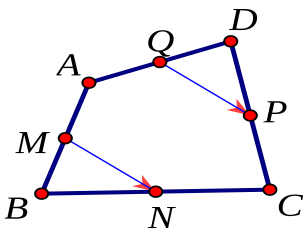
$MN = \frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP // AC$ và

$QP = \frac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN // QP$ và $MN = QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$



Hình 1.6

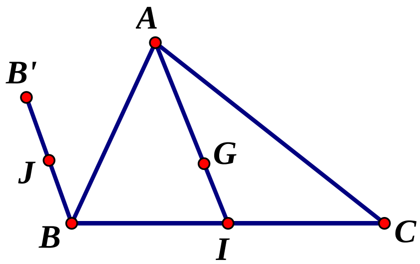
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.



Hình 1.7

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB'//AG$.

Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2)

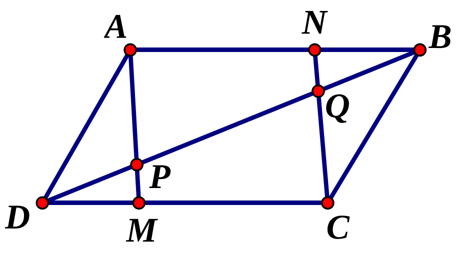
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải (hình 1.8)

Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.



Hình 1.8

Xét tam giác ΔDMP và ΔBNQ ta có

$DM = NB$ (giả thiết), $PDM = QBN$ (so le trong)

Mặt khác $DMP = APB$ (đối đỉnh) và

$APQ = NQB$ (hai góc đồng vị) suy ra

$DMP = BNQ$.

Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.10: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

Bài 1.11: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{NB}$ và $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QB}$.

Bài 1.12: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD với $AB=2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CB}$ b) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{DC}$

Bài 1.13: Cho tam giác ABC có trực tâm H và O tâm là đường tròn ngoại tiếp . Gọi B' là điểm đối xứng B qua O. Chứng minh : $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C}$.