§2: ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

A: TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí và chứng minh định lí.

- Trong toán học định lý là một mệnh đề đúng . Nhiều định lý được phát biểu dưới dạng "$\forall x \in X,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$", $P(x)$, $Q(x)$ là các mệnh đề chứa biến
- Có hai cách để chứng minh định lí dưới dạng trên

Cách 1: Chứng minh trực tiếp gồm các bước sau:

- Lấy $x \in X$ bất kỳ mà $P(x)$ đúng
- Chứng minh $Q(x)$ đúng(bằng suy luận và kiến thức toán học đã biết)

Cách 2: Chứng minh bằng phản định lí gồm các bước sau:

- Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai
- Dùng suy luận và các kiến thức toán học để đi đến mâu thuẫn.

2. Định lí đảo, điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.

- Cho định lí dưới dạng "$\forall x \in X,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1). Khi đó

$P(x)$ là ***điều kiện đủ*** để có $Q(x)$

$Q(x)$ là ***điều kiện cần*** để có $P(x)$

- Mệnh đề $\forall x \in X,\ Q(x) \Rightarrow P(x)$ đúng thì được gọi ***định lí đảo*** của định lí dạng (1)

Lúc đó (1) được gọi là ***định lý thuận*** và khi đó có thể gộp lại thành một định lí $\forall x \in X,\ Q(x) \Leftrightarrow P(x)$, ta gọi là "$P(x)$ là ***điều kiện cần và đủ*** để có $Q(x)$"

Ngoài ra còn nói "$P(x)$ nếu và chỉ nếu $Q(x)$", "$P(x)$ khi và chỉ khi $Q(x)$",

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG .**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n và n^3 chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3.

Lời giải

Giả sử n không chia hết cho 3 khi đó $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$, $k \in Z$

Với $n = 3k + 1$ ta có $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho ba (mâu thuẫn)

Với $n = 3k + 2$ ta có $n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 4$ không chia hết cho ba (mâu thuẫn)

Vậy n chia hết cho 3.

Ví dụ 2: Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại số thực α sao cho $a.f(\alpha) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Ta có $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$.

Giả sử phương trình đã cho vô nghiệm, nghĩa là $\Delta < 0$.

Khi đó ta có: $af(x) = a^2\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra không tồn tại α để $af(\alpha) \leq 0$, trái với giả thiết.

Vậy điều ta giả sử ở trên là sai, hay phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Ví dụ 3: Cho a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng nếu

$a + b + c > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ thì có một và chỉ một trong ba số a, b, c lớn hơn một.

Lời giải

Giả sử ngược lại, khi đó ta có các trường hợp sau:

- TH1: Với ba số đều lớn hơn 1 hoặc ba số đều nhỏ hơn 1 thì mâu thuẫn với giả thiết $abc = 1$
- TH2: Với hai trong ba số lớn hơn 1, không mất tính tổng quát giả sử $a > 1, b > 1$

Vì $abc = 1$ nên $c < 1$ do đó

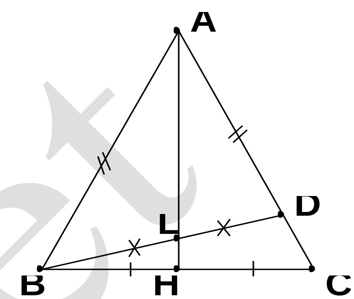
$(a-1)(b-1)(c-1) < 0 \Leftrightarrow abc + a + b + c - ab - bc - ca - 1 < 0$

$\Leftrightarrow a + b + c < ab + bc + ca \Leftrightarrow a + b + c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ (mâu thuẫn)

Vậy chỉ có một và chỉ một trong ba số a, b, c lớn hơn một.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng một tam giác có đường trung tuyến vừa là phân giác xuất phát từ một đỉnh là tam giác cân tại đỉnh đó.

Lời giải



Giả sử tam giác ABC có AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác và không cân tại A.
Khôngmất tính tổng quát xem như $AC > AB$.
Trên AC lấy D sao cho $AB = AD$.
Gọi L là giao điểm của BD và AH .

Khi đó $AB = AD, BAL = LAD$ và AL chung nên $\Delta ABL = \Delta ADL$

Do đó $AL = LD$ hay L là trung điểm của BD
Suy ra LH là đường trung bình của tam giác CBD
$\Rightarrow LH\,/\,/DC$ điều này mâu thuẫn vì LH, DC cắt nhau tại A
Vậy tam giác ABC cân tại A.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 1.14: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm thì a và c cùng dấu.

Bài 1.15: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu hai số nguyên dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì cả hai số đó phải chia hết cho 3.

Bài 1.16: Chứng minh rằng : Nếu độ dài các cạnh của tam giác thỏa mãn bất đẳng thức $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là độ dài cạnh nhỏ nhất của tam giác.

Bài 1.17: Cho a, b, c dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau sai $a\;\;1-b\;\;>\frac{1}{4},\; b\;\;1-c\;\;>\frac{1}{4},\; c\;\;1-a\;\;>\frac{1}{4}$

Bài 1.18: Nếu $a_1a_2 \geq 2\;\; b_1 + \;\; b_2$ thì ít nhất một trong hai phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0,\; x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.

Bài 1.19: Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Bài 1.20: Cho các số $a,\; b,\; c$ thỏa các điều kiện : $\begin{cases} a + b + c > 0 & (1) \\ ab + bc + ca > 0 & (2) \\ abc > 0 & (3) \end{cases}$

Chứng minh rằng cả ba số $a,\; b,\; c$ đều dương.

Bài 1.21: Chứng minh bằng phản chứng định lí sau : “Nếu tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF bằng nhau, thì tam giác ABC cân”.

Bài 1.22: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

➢ **DẠNG TOÁN 2: SỬ DỤNG THUẬT NGỮ ĐIỀU KIỆN CẦN, ĐIỀU KIỆN ĐỦ, ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ .**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho định lí : "Cho số tự nhiên n. Nếu n^5 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5". Định lí này được viết dưới dạng $P \Rightarrow Q$.

a) Hãy xác định các mệnh đề P và Q.

b) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ "điều kiện cần".

c) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ "điều kiện đủ".

d) Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dùng các thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

Lời giải.

a) P : "n là số tự nhiên và n^5 chia hết cho 5", Q : "n chia hết cho 5".

b) Với n là số tự nhiên, n chia hết cho 5 là điều kiện cần để n^5 chia hết cho 5 ; hoặc phát biểu cách khác : Với n là số tự nhiên, điều kiện cần để n^5 chia hết cho 5 là n chia hết cho 5.

c) Với n là số tự nhiên, n^5 chia hết cho 5 là *điều kiện đủ* để n chia hết cho 5.

d) Định lí đảo : "Cho số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 5 thì n^5 chia hết cho 5". Thật vậy, nếu n = 5k thì $n^5 = 5^5.k^5$: Số này chia hết cho 5.

Điều kiện cần và đủ để n chia hết cho 5 là n^5 chia hết cho 5.

Ví dụ 2: Phát biểu các mệnh đề sau với thuật ngữ "Điều kiện cần", "Điều kiện đủ"

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau

b) Nếu số nguyên dương chia hết cho 6 thì chia hết cho 3

c) Nếu hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân

d) Nếu tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao thì $AB^2 = BC.BH$

Lời giải

a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có diện tích bằng nhau

Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau

b) Số nguyên dương chia hết cho 6 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 3

Số nguyên dương chia hết cho 3 là điều kiện cần để nó chia hết cho 6

c) Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện đủ để nó là hình thang cân

Hình thang cân là điều kiện cần để nó có hai đường chéo bằng nhau

d) Tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao là điều kiện đủ để $AB^2 = BC.BH$

Tam giác ABC có $AB^2 = BC.BH$ là điều kiện cần để nó vuông tại A và AH là đường cao

Ví dụ 3: Dùng thuật ngữ điều kiện cần và đủ để phát biểu định lí sau

a) Tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
b) Tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.
c) Tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.
d) Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi nó có chữ số tận cùng là số chẵn.

Lời giải

a) Tam giác ABC vuông là điều kiện cần và đủ để $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
b) Tứ giác là hình chữ nhật là điều kiện cần và đủ để nó có ba góc vuông.
c) Tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn là điều kiện cần và đủ để nó có hai góc đối bù nhau.
d) Một số chia hết cho 2 là điều kiện cần và đủ để nó có chữ số tận cùng là số chẵn.

2. Bài tập luyện tập

Bài 1.23: Phát biểu các định lý sau đây bằng cách sử dụng khái niệm " Điều kiện cần", " Điều kiện đủ "
a) Nếu trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì hai đường thẳng đó song song với nhau
b) Nếu số nguyên dương có chữ tận cùng bằng 5 thì chia hết cho 5
c) Nếu tứ giác là hình thoi thì 2 đường chéo vuông góc với nhau
d) Nếu 2 tam giác bằng nhau thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau
e) Nếu số nguyên dương a chia hết cho 24 thì chia hết cho 4 và 6

Bài 1.24. Dùng thuật ngữ điều kiện cần và đủ để phát biểu định lí sau
a) Một tam giác là tam giác cân, nếu và chỉ nếu nó có hai góc bằng nhau
b) Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
c) $x \ge y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \ge \sqrt[3]{y}$
d) Tứ giác MNPQ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Bài 1.25: Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu định lí sau:
a) "Nếu một tứ giác là hình vuông thì nó có bốn cạnh bằng nhau".
Có định lí đảo của định lí trên không , vì sao?
b) "Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc".
Có định lí đảo của định lí trên không , vì sao?

Bài 1.26: Dùng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau :
a) Nếu $MA \perp MB$ thì M thuộc đường tròn đường kính AB ;
b) $a \ne 0$ hoặc $b \ne 0$ là điều kiện đủ để $a^2 + b^2 > 0$.