Bài toán 04: SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BỐN ĐIỂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN.

Phương pháp:

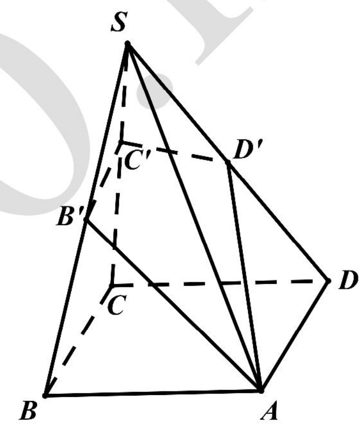
Sử dụng các kết quả

- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{DC}$
- A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành . Gọi B',D' lần lượt là trungđiểm của các cạnh SB,SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính $\frac{SC'}{SC}$.

Lời giải.



Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\vec{b}=\overrightarrow{SA},\vec{c}=\overrightarrow{SD}$ và $m=\frac{SC'}{SC}$

Ta có $\overrightarrow{SB'}=\frac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{SD'}=\frac{1}{2}\vec{c}$ và

$\overrightarrow{SC'}=m\overrightarrow{SC}=m\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}\right)=m\left(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SC'}=2m\overrightarrow{SB'}-m\overrightarrow{SA}+2m\overrightarrow{SD'}$

Do A,B',C',D' đồng phẳng nên

$2m+(-m)+2m=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$

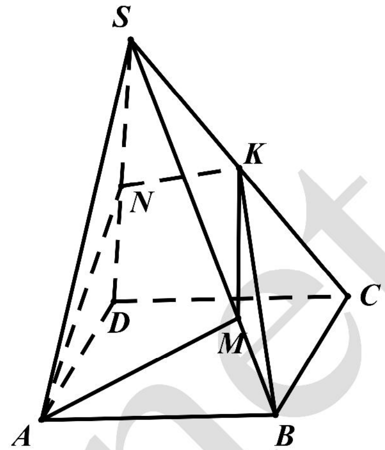
Vậy $\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại M,N. Chứng minh $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$.

Lời giải.

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{SA}, \vec{b} = \overrightarrow{SA}, \vec{c} = \overrightarrow{SD}$ và $\frac{SB}{SM} = m,\ \frac{SD}{SN} = n$.

Ta có $\overrightarrow{SM} = \frac{SM}{SB}\overrightarrow{SB} = \frac{1}{m}\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SN} = \frac{SN}{SD}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$



$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right)$

$= \frac{n}{2}\overrightarrow{SN} + \frac{m}{2}\overrightarrow{SM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$.

Mặt ta có A, M, K, N đồng phẳng nên

$\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow m + n = 3$.

Vậy $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm K, E, F. Các mặt phẳng $(BCF), (CDK), (BDE)$ cắt nhau tại M. Đường thẳng AM cắt (KEF) tại N và cắt mặt phẳng (BCD) tại P. Chứng minh $\frac{NP}{NA} = 3\frac{MP}{MA}$.

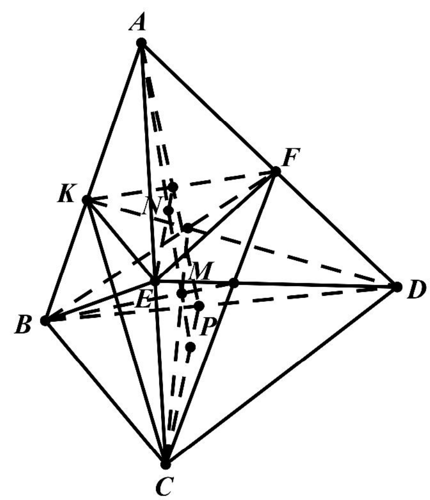
Lời giải.

- Chỉ ra sự tồn tại của điểm M.

Gọi $I = CF \cap BK \quad \Rightarrow CI = (BCF) \cap (CDK)$

Gọi $J = DE \cap CF \Rightarrow (BCF) \cap (BDE) = BJ$

Khi đó $M = CI \cap BJ$ chính là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCF), (CDK), (BDE)$.



- Chứng minh $\frac{NP}{NA} = 3\frac{MP}{MA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD} = \gamma\overrightarrow{AF}$

Do M, N thuộc đoạn AP nên tồn tại các số $m, n > 1$ sao cho $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AN}$.

Ta có B, C, D, P đồng phẳng nên tồn tại x, y, z với $x + y + z = 1\ (1)$ sao cho $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$

$= \alpha x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AE} + \gamma z\overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\alpha x}{n}\overrightarrow{AK} + \frac{\beta y}{n}\overrightarrow{AE} + \frac{\gamma z}{n}\overrightarrow{AF}$

Mặt khác $N \in (KEF)$ nên $\frac{\alpha x}{n} + \frac{\beta y}{n} + \frac{\gamma z}{n} = 1 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = n \quad (2)$.

Làm tương tự ta có

$M \in (BCE) \Rightarrow x + y + \gamma z = m \quad (3)$

$M \in (CDK) \Rightarrow x + \beta y + \gamma z = m \quad (4)$

$M \in (BDE) \Rightarrow \alpha x + y + z = m \quad (5)$

Từ $(3),(4),(5)$ suy ra $2(x+y+z) + \alpha x + \beta y + \gamma z = 3m$

Kết hợp với $(1),(2)$ ta được $2 + n = 3m \Leftrightarrow 2 + \frac{AP}{AN} = 3\frac{AP}{AM} \Leftrightarrow 3 + \frac{NP}{NA} = 3\left(1 + \frac{MP}{MA}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{NP}{NA} = 3\frac{MP}{MA}$.(đpcm)

Ví dụ 4. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n (n \ge 2)$ nằm trong (P) và S là một điểm nằm ngoài (P). Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tại các điểm $B_1, B_2, .., B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SB_2}{SB_2} + ... + \frac{SA_n}{SB_n} = a$ ($a > 0$ cho trước)

Chứng minh (α) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Trên các canh SA_i lấy các điểm $X_i (i = 1,2,..n)$ sao cho $SX_i = \frac{SA_i}{a}$

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SX_1} + \overrightarrow{SX_2} + ... + \overrightarrow{SX_n}$ thì I là điểm cố định (do các điểm S và $X_1, X_2, .., X_n$ ccos định)

Ta có $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SX_1} + \overrightarrow{SX_2} + ... + \overrightarrow{SX_n} = \frac{SX_1}{SB_1}\overrightarrow{SB_1} + \frac{SX_2}{SB_2}\overrightarrow{SB_2} + ... + \frac{SX_n}{SB_n}\overrightarrow{SB_n}$

Do $\frac{SX_1}{SB_1} + \frac{SX_2}{SB_2} + ... \frac{SX_n}{SB_n} = \frac{SA_1}{aSB_1} + \frac{SA_2}{aSB_2} + ... + \frac{SA_n}{aSB_n} = 1$ nên các điểm $I, B_1, B_2, ..., B_n$ đồng phẳng suy ra mặt phẳng (α) đi qua điểm I cố định.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F là các điểm thỏa nãm $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ còn P,Q,R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA}=l\overrightarrow{PD},\overrightarrow{QE}=l\overrightarrow{QF},\overrightarrow{RB}=l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P,Q,R thẳng hàng.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.

a) Chứng minh $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

c) Xác định vị trí của M để $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M,N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN // BD'$. Tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $B'A'D'=60^0, B'A'A=D'A'A=120^0$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.

b) Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB, AD, AA'.

5. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC được tính theo công thức $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M,N,P,Q lần lượt thuộc AB,BC,CD,DA sao cho $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DP}=k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để M,N,P,Q đồng phẳng.

7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $ASB=BSC=CSA=\alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB,SC.

Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

8. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',G'.

Chứng minh $\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SC}{SC'}=3\dfrac{SG}{SG'}$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D'.

Chứng minh $\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SC}{SC'}=\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}$.

10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$.

11. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ lần lượt tại A', B', C', D'. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1.Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

12. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$
Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt) . Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \le \frac{9}{S^2}$.

13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} (k \neq 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$.
Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

15. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC cỏa tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$.
Chứng minh S, I, J thẳng hàng và $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$.