Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

Để tìm tập hợp điểm M ta có thể quy về tìm tập hợp điểm N và tìm một phép vị tự $V_{(I;k)}$ nào đó sao cho $V_{(I;k)}(N)=M$ suy ra quỹ tích điểm M là ảnh của quỹ tích N qua $V_{(I;k)}$.

Các ví dụ

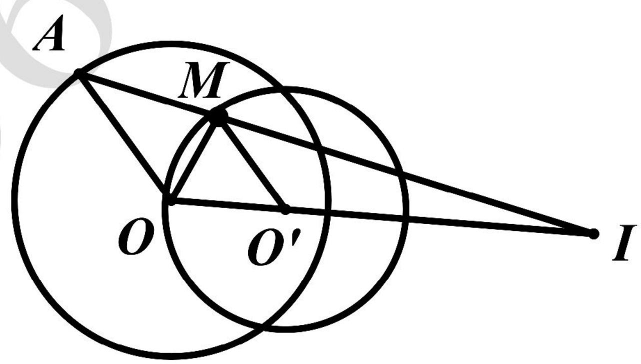
Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I nằm ngoài đường tròn sao cho $OI=3R$, A là một điểm thay đổi trên đường tròn $(O;R)$. Phân giác trong góc IOA cắt IA tại điểm M. Tìm tập hợp điểm M khi A di động trên $(O;R)$.

Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{MI}{MA}=\frac{OI}{OA}=\frac{3R}{R}=3$

$\Rightarrow IM=\frac{3}{4}IA$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$

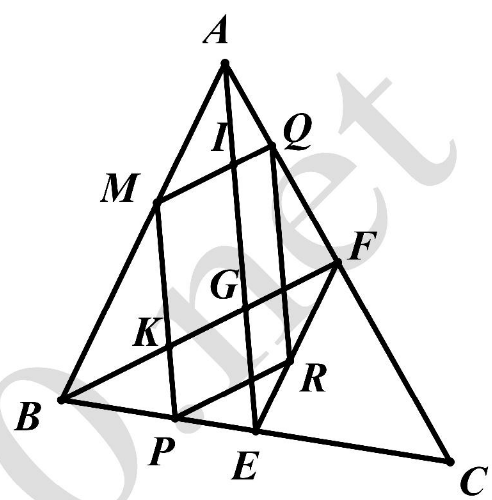


$\Rightarrow V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}(A)=M$, mà A thuộc đường tròn $(O;R)$ nên M thuộc $\left(O';\frac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$. Vậy tập hợp điểm M là $\left(O';\frac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Qua điểm M trên cạnh AB vẽ các đường song song với các đường trung tuyến AE và BF, tương ứng cắt BC và CA tai P,Q. Tìm tập hợp điểm R sao cho $MPRQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $I = MQ \cap AE$, $K = MP \cap BF$ và G là trọng tâm của tam giác ABC.



Ta có $\frac{MI}{BG} = \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AF} = \frac{IQ}{GF}$

$\Rightarrow \frac{MI}{IQ} = \frac{BG}{GF} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MR}$ Do đó

$\overrightarrow{GR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}(M) = R$, mà M thuộc cạnh AB nên R thuộc ảnh của cạnh AB qua $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$ đoạn chính là đoạn EF.

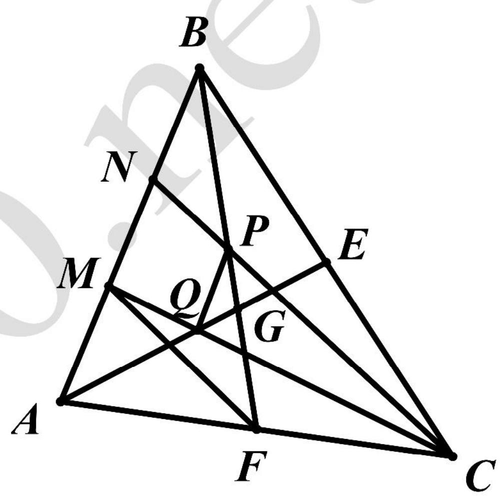
Vậy tập hợp điểm R là đoạn EF.

Bài toán 05: SỬ DỤNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI TOÁN.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy các điểm M,N sao cho $AM=MN=NB$, các điểm E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh CB,CA, gọi P là giao điểm của BF và CN, Q là giao điểm của AE với CM. Chứng minh $PQ//AB$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có MF là đường trung bình của tam giác ACN nên $MF // CN$, mặt khác N là trung điểm của MB nên P là trung điểm của BF.

Ta có

$$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$$
$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}.$$

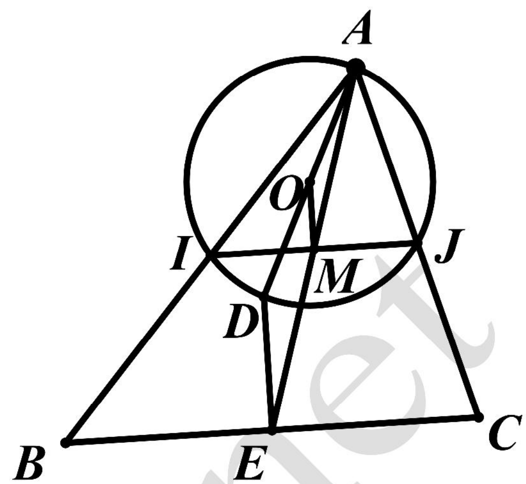
Tương tự $\overrightarrow{GQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$.

Vậy $V_{\left(G;\frac{1}{4}\right)}(B)=P$ và $V_{\left(G;\frac{1}{4}\right)}(A)=Q$ suy ra $PQ//AB$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi I,J,M lần lượt là trung điểm của AB,AC,IJ. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác AIJ cắt AO tại D. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên BC. Chứng minh A,M,E thẳng hàng.

Lời giải.

Xét phép vị tự $V_{(A;2)}$ ta có



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AJ}$ nên $V_{(A;2)}(I)=B, V_{(A;2)}(J)=C$ do đó $V_{(A;2)}$ biến tam giác AIJ thành tam giác ABC, do đó phép vị tự này biến đường tròn (O) thành đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC.

Do $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}\Rightarrow V_{(A;2)}(O)=D$

$\Rightarrow O'\equiv D$, hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giả sử $V_{(A;2)}(M)=M'$ khi đó $OM\perp IJ\Rightarrow DM'\perp BC\Rightarrow M'\equiv E$.

Vậy $V_{(A;2)}(M)=E$ nên A, M, E thẳng hàng.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

43. Cho đường thẳng $d: 2x-y-5=0$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=9$. Tìm ảnh của d và (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k=-2$.

44. Cho tam giác ABC có B, C cố định còn A chạy trên một đường tròn $(O;R)$ cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

45. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn đó. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

46. Chứng minh rằng nếu thực hiện liên tiếp hai phép vị tự có tỉ số k_1, k_2 với $k_1k_2 \neq 1$ thì ta được một phép vị tự có tỉ số $k = k_1.k_2$.

47. Trong một tam giác chứng minh trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng (*đường thẳng đi qua ba điểm này có tên gọi là đường thẳng ơle).*

48. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh trong tâm các tam giác ABC, CDA, BCD, DAB cùng nằm trên một đường tròn.

49. Cho ba đường tròn $(O_i; R_i)\left(i = \overline{1,3}\right)$ đôi một tiếp xúc ngoài tại A, B, C. Dây cung AC kéo dài của (O_1) cắt (O_3) tại A_1; A_1A_2 là đường kính của (O_3). Chứng minh A, B, A_2 thẳng hàng.

50. Cho hai đường tròn có bán kính khác nhau (O_1) và (O_2) nằm ngoài nhau. Xét đường tròn (O) tiếp xúc ngoài đồng thời (O_1) tại A, với (O_2) tại B. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm M bất kì $(M \neq A, B)$. Đường thẳng MA cắt (O_1) tại M_1; MB cắt (O_2) tại điểm thứ hai M_2. Chứng minh rằng khi M di động trên (O), thì đường thẳng M_1M_2 đi qua một điểm cố định.