Bài toán 04: SỬ DỤNG PHÉP TỊNH TIẾN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$ và điểm M di động trên hình (H) thì điểm M' thuộc hình (H'), trong đó (H') là ảnh của hình (H) qua $T_{\vec{v}}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt B, C cố định trên đường tròn (O) tâm O. Điểm A di động trên (O). Chứng minh khi A di động trên (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Vì $BCD = 90^0$, nên $DC // AH$. Tương tự $AD // CH$, do đó $ADCH$ là hình bình hành.Suy ra

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$ không đổi

$\Rightarrow T_{2\overrightarrow{OM}}(A) = H$, vì vậy khi A di động trên dường tròn (O) thì H di động trên đường tròn $(O') = T_{2\overrightarrow{OM}}((O))$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định, $BAC = \alpha$ không đổi và $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ không đổi. Tìm tập hợp các điểm B, C.

Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó theo định lí sin ta có $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$ không đổi

(do $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ không đổi).

Vậy $OA = R = \dfrac{BC}{2\sin\alpha}$, nên O di động trên đường tròn tâm A bán kính $AO = \dfrac{BC}{2\sin\alpha}$. Ta có $OB = OC = R$ không đổi và $BOC = 2\alpha$ không đổi suy ra $OBC = OCB = \dfrac{180^0 - 2\alpha}{2}$ không đổi. Mặt khác $\overrightarrow{BC}$ có phương không đổi nên $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ cũng có phương không đổi.

Đặt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v_2}$ không đổi , thì $T_{\overrightarrow{v_1}}(O) = B, T_{\overrightarrow{v_2}}(O) = C$.

Vậy tập hợp điểm B là đường tròn $\left(A_1; \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ ảnh của $\left(A, \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ qua $T_{\overrightarrow{v_1}}$, và tập hợp điểm C là đường tròn $\left(A_2; \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ ảnh của $\left(A, \dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ qua $T_{\overrightarrow{v_2}}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,cho hai đường thẳng $d: 2x + 3y - 2 = 0$, $d_1: 2x + 3y - 5 = 0$ và vec tơ $\vec{v} = (2; -1)$.

a) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua $T_{\vec{v}}$.

b) Tìm vec tơ $\vec{u}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{u}}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường hai thẳng $d: 3x - 5y + 3 = 0$ và $d': 3x - 5y + 24 = 0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết $|\vec{v}| = \sqrt{13}$ và $T_{\vec{v}}(d) = d'$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=9$ và $\vec{v}=(-3;4)$. Tìm ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$.

4. Cho đường tròn (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi . Các đường thẳng AM, AN cắt tiếp tuyến tại B tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác MPQ và NPQ.

5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, trong đó $AD=R$. Dựng các hình bình hành $DABM$ và $DACN$. Chứng minh tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác DNM nằm trên $(O;R)$.

6. Cho tam giác ABC cố định có trực tâm H. Vẽ hình thoi $BCDE$. Từ D và E vẽ các đường vuông góc với AB và AC, các đường thẳng này cắt nhau tại M. Tìm tập hợp điểm M.

7. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và A, B là hai điểm không thuộc hai đường thẳng đó sao cho AB không song song hoặc trùng với d_1 (hay d_2). Tìm trên d_1 điểm M và trên d_2 điểm N sao cho $AMBN$ là hình bình hành.

8. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O_1;R)$ và $(O_2;R)$ cắt nhau tại A, B. Một đường thẳng d vuông góc với AB cắt (O_1) tại C, D và cắt (O_2) tại E, F sao cho $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng.

a) Chứng minh CAE không phụ thuộc vào vị trí của d.

b) Tính độ dài CE theo R và $AB=a$.