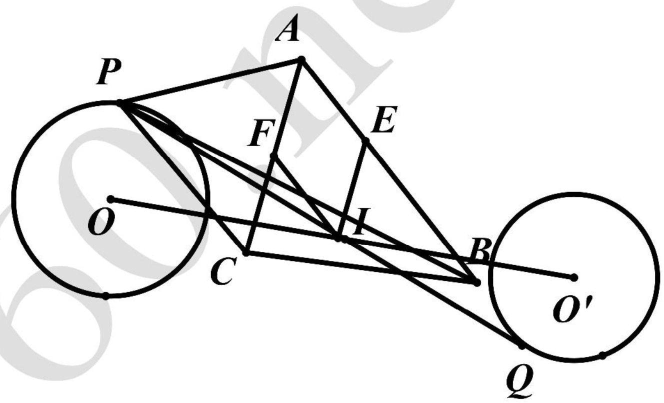
Bài toán 05: SỬ DỤNG PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường tròn (O). Trên AB lấy điểm E sao cho $BE = 2AE$, F là trung điểm của AC và I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AEIF$. Với mỗi điểm P trên đường tròn (O), ta dựng điểm Q sao cho $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 6\overrightarrow{IQ}$. Tìm tập hợp điểm Q khi P thay đổi trên (O)

Lời giải.

Gọi K là điểm xác định bởi $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.



Khi đó

$\overrightarrow{KA} + 2\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}\right)$

$+3\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

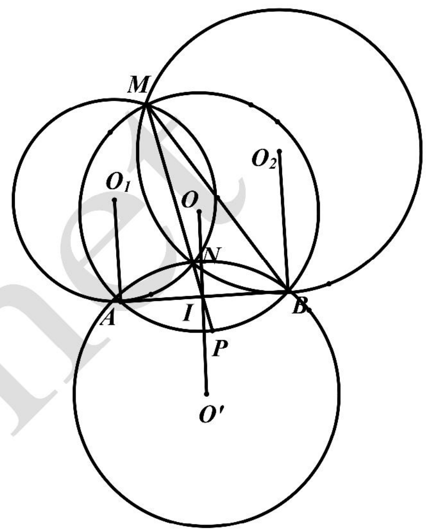
Mặt khác $AEIF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên $K \equiv I$.

Từ giả thiết suy ra $6\overrightarrow{PK} + \left(\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}\right) = 6\overrightarrow{IQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{IQ}$, hay $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IQ}$.

Vậy $Đ_I(P) = Q$ mà P di động trên đường tròn (O) nên Q di động trên đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng với A, B. Hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua M và tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Tìm tập hợp điểm N khi M di động.

Lời giải.



Gọi $I = MN \cap AB$, ta có $IA^2 = IM.IN \ (1)$

Tương tự $IB^2 = IM.IN \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $IA = IB$ nên I là trung điểm của AB.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với đường tròn (O).

Dễ thấy $P_{I/(O)} = -IM.IP = -IA.IB = -IA^2$

Do đó $-IM.IN = -IM.IP \Rightarrow IN = IP$ vậy I là trung điểm của NP do đó $Đ_I(P) = N$, mà P di động trên đường tròn (O) nên N di động trên đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Vậy tập hợp điểm N là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

21. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$ qua phép đối xứng tâm $I(-1;2)$.

22. Cho hai đường thẳng $d_1: 3x - y - 3 = 0$ và $d_2: x + y = 0$. Phép đối xứng tâm I biến d_1 thành $d_1': 3x - y + 1 = 0$ và biến d_2 thành $d_2': x + y - 6 = 0$.

23. Cho đường cong $(C): y = \frac{1}{x}$ và điểm $A(-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ cắt đường cong (C) tại hai điểm M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất.

24. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành $ABCD$ lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $A'B'C'D'$ cũng là hình bình hành . Chứng minh hai hình bình hành đó có cùng tâm.

25. Cho hai điểm A, C và đường tròn (O). Dựng hình bình hành $ABCD$ có hai đỉnh B, D thuộc (O).

26. Cho hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N sao cho A là trung điểm của MN.

27. a) Cho góc xOy và một điểm A thuộc miền trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng qua A cắt Ox, Oy theo thứ tự tại M, N sao cho A là trung điểm của MN.

b) Chứng minh một đường thẳng bất kì qua A cắt Ox, Oy lần lượt tại C, D thì luôn có $S_{OCD} \geq S_{OMN}$.