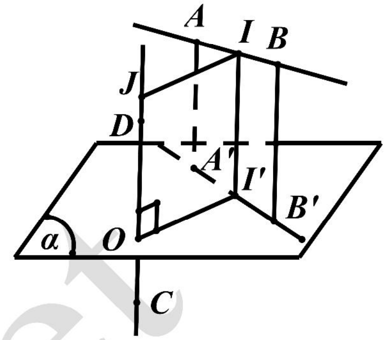
Bài toán 04: ỨNG DỤNG PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:



Cho hai đường thẳng chéo nhau AB và CD

Xét mặt phẳng (α) vuông góc với CD tại điểm O .Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($I\in AB, J\in CD$)

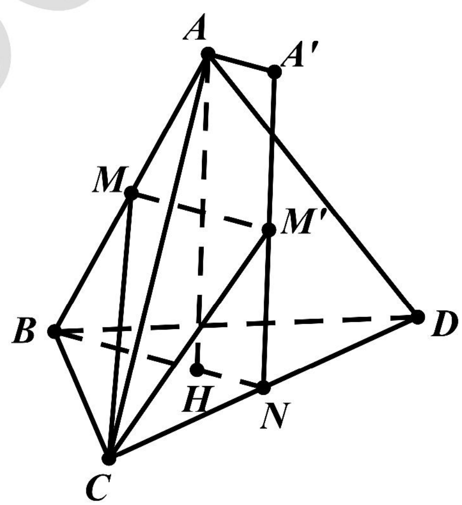
Xét phép chiếu vuông góc lên (α), Gọi A',B',I' là hình chiếu của A,B,I thì $IJ=OI'$, từ đó $d(AB,CD)=d(O,A'B')$.

Vậy để tính IJ ta qui về tính OI' trong mặt phẳng (α).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Lời giải.



Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì $AH\perp(BCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với AH thì $(\alpha)\perp BN$. Xét phép chiếu vuông góc lên (α), gọi A',B',C',D',H',M',N' lần lượt là ảnh của A,B,C,D,H,M,N thì $B'\equiv N'\equiv H'\equiv N$, $C'\equiv C, D'\equiv D$.

Ta có $d(CM,CD)=d(N,CM')$.

$BH=\frac{2}{3}BN=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$

$NM'=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Tam giác NCM' vuông tại N nên $\dfrac{1}{d^2\left(N,CM'\right)}=\dfrac{1}{CN^2}+\dfrac{1}{NM'^2}$

$$=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{10}{a^2}\Rightarrow d\left(N,CM'\right)=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d\left(CM,BN\right)=d\left(N,CM'\right)=\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC.

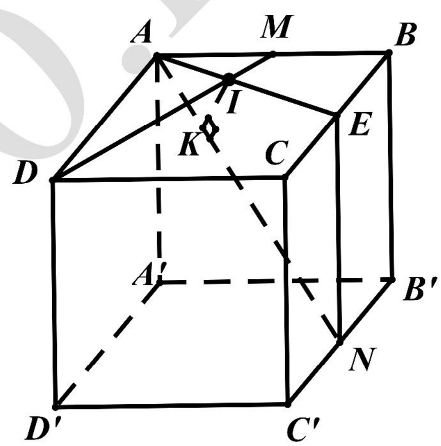
Dễ thấy $\Delta ADM=\Delta BAE$ nên $AMD=AEB$, mà

$AEB+BAE=90^0\Rightarrow AMD+BAE=90^0$

$\Rightarrow DM\perp AE$. Lại có

$EN\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow EN\perp DM$ do đó

$\left(AEN\right)\perp DM$ tại I.



Xét phép chiếu vuông góc lên $\left(ANE\right)$, ta có AN chính là hình chiếu của nó nên $d\left(DM,AN\right)=d\left(I,AN\right)$

Gọi K là hình chiếu cuả I trên AN thì $d\left(I,AN\right)=IK$.

Ta có $\Delta AKI\sim\Delta AEN$, suy ra

$$\frac{IK}{EN}=\frac{AI}{AN}\Rightarrow IK=\frac{AI.EN}{AN}\quad(1)$$

$$AN^2=AE^2+EN^2=AB^2+BE^2+EN^2=\frac{9a^2}{4}\Rightarrow AN=\frac{3a}{2}.$$

$$\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Thay vào (1) ta được $IK=\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $d\left(DM,AN\right)=\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

64. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng:

a) OA và BC

b) AI và OC

65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2002)

67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Xác định điểm O cách đều các điểm A, B, C, D và tính khoảng cách từ A đến (BCD).

68. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = b, AD = c$ và $BAC = CAD = DAB = 60^0$. Tính khoảng cách từ D đến (ABC).

69. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc $ABC = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2008)

71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2007)

72. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a và $AC = a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a$. Tính khoảng cách

a) Từ O đến (SCD).

b) Từ A đến (SBC).

74. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$, $AC = 4, BD = 2, SO = \sqrt{3}$. Tính

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

76. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AD = BC = b, AC = BD = c$. Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện.

77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh $MN \perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

(Trích đề thi ĐH Khối B Năm 2007)

78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh $SA \perp (ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (BCM).

79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

80. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh $MB \perp MA'$ và tính khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.

CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP CHƯƠNG

81. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a, M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Mặt phẳng $(A'MC)$ cắt cạnh $C'D'$ tại N.

a) Tứ giác $A'MCN$ là hình gì? Chứng minh $MN \perp CB'$.
b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên MN. Tìm tập hợp điểm H.
82. Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc và các điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba tia đó sao cho $OA = OB + OC = 1$.
a) Chứng minh tổng diện tích tất cả các mặt của tứ diện $OABC$ không đổi.
b) Tính tổng các góc $OBA + ABC + OCB$.
83. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của cạnh AB. Tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với $B'C$.
84. Hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.
Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua MN song song với SB.
85. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$ của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc giữa các cặp đường thẳng
a) MN và $C'D'$.
b) BD và AD'.
c) MN và AP.
86. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{2}a$. Cạnh $SC = a$ và vuông góc với đáy . Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng CD và SE.
87. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau , vuông góc với nhau và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + BN = MN$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh:
a) Tam giác OAB là tam giác tù.
b) Chứng minh khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M, N di động.
88. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = b, BC = c$ và các cạnh còn lại bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.
a) Chứng minh IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.
b) Tìm điểm M trên IJ sao cho $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.
89. Cho từ diện $D.ABC$. Gọi $A'B'C'$ theo thứ tự là các điểm trên DA, DB, DC sao cho $DA'.DA = DB'.DB = DC'.DC$, H là trực tâm của tam

giác $A'B'C'$ và I là giao điểm của DH với mặt phẳng (ABC). Một điểm M di động trong tam giác ABC, đường thẳng Δ đi qua M cùng phương (song song hoặc trùng) với ID lần lượt cắt các mặt phẳng $(DAB),(DBC),(DCA)$ tại MNQ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{1}{MN^2}+\frac{1}{MP^2}+\frac{1}{MQ^2}.$$