Bài toán 04: CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG THẲNG CÙNG NẰM TRONG MỘT MẶT PHẲNG HOẶC BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

- Để chứng minh các đường thẳng cùng nằm trên một mặt phẳng ta chứng minh các đường thẳng đó cùng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng.
- Để chứng minh 4 điểm đồng phẳng ta chứng minh các điểm đó thuộc các đường thẳng mà các đường thẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng nào đó.
- Ngoài ra ta có thể sử dụng định lí **Menelaus** Trong không gian để chứng minh bốn điểm đồng phẳng.

Định lí Menelaus

Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB,BC,CD,DA của tứ diện $ABCD$ (M,N,P,Q khác với A,B,C,D) thì M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$.

Các ví dụ

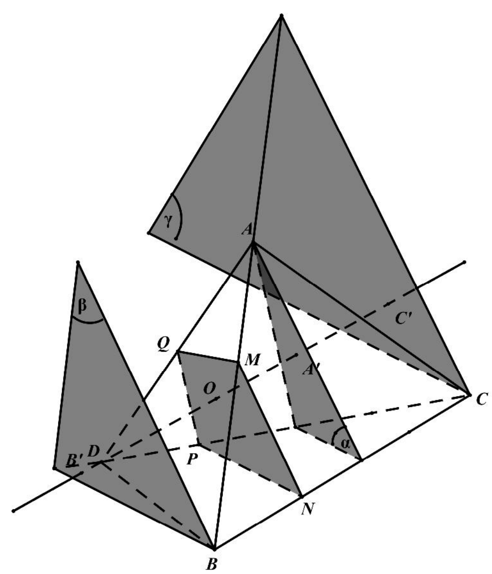
Ví dụ 1. Chứng minh định lý Menelaus.

Lời giải.

Phần thuận.

Giả sử M,N,P,Q đồng phẳng. Từ các đỉnh A,B,C dựng các mặt phẳng $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ theo thứ tự song song với $(MNPQ)$.

Từ D dựng đường thẳng d cắt $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ theo thứ tự tại A',B',C' và cắt $(MNPQ)$ tại O.



Ta có $\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$

Theo định lí Thales thì $\frac{OA'}{OB'}=\frac{MA}{MB}$

$\frac{OB'}{OC'}=\frac{NB}{NC},\frac{OC'}{OD}=\frac{PC}{PD},\frac{OD}{OA'}=\frac{QD}{QA}$

$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=$

$\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$.

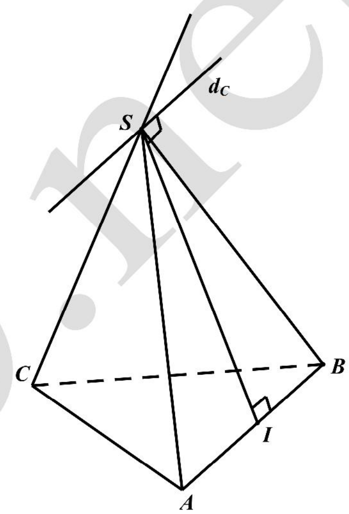
Phần đảo.

Giả sử $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$. Gọi $E=(MNP)\cap AD$ theo chứng minh trên,do M,N,P,E đồng phẳng nên $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{ED}{EA}=1 \Rightarrow \frac{QD}{QA}=\frac{ED}{EA} \Rightarrow E\equiv Q$.

Vậy M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB,SAC,SBC cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải.



Gọi d_C là đường phân giác ngoài của góc S trong tam giác SAB và I là trung điểm của AB.

Do tam giác SAB cân tại S nên $SI\perp AB$ và SI là phân giác trong của góc S nên $SI\perp d_C$.

Vậy trong (SAB), ta có

$$\begin{cases} d_C\perp SI \\ AB\perp SI \end{cases} \Rightarrow d_C // AB \Rightarrow d_C // (ABC).$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC).

$$\text{Vậy } \begin{cases} S\in d_C \\ d_C // (ABC) \\ (\alpha) // (ABC) \\ S\in(\alpha) \end{cases} \Rightarrow d_C\subset(\alpha).$$

Tương tự , gọi d_A,d_B là các đường phân giác ngoài góc S của các tam giác SBC,SCA thì d_A và d_B cũng nằm trong mặt phẳng (α) nên các đường thẳng d_A,d_B,d_C cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua S và song song với mặt phẳng (ABC).

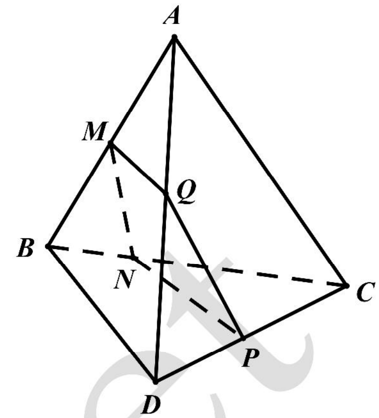
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là các điểm trên các cạnh AB,BC,CD,DA (M,N,P,Q khác với các đỉnh của tứ diện) sao cho $\frac{MA}{MB}=\frac{PD}{PC}$ và $\frac{NB}{NC}=\frac{QA}{QD}$. Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{PD}{PC}\Rightarrow\frac{MA}{MB}.\frac{PC}{PD}=1\quad(1)$

Tương tự $\frac{NB}{NC}=\frac{QA}{QD}\Rightarrow\frac{NB}{NC}.\frac{QD}{QA}=1\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$ theo định lí Menelaus thì bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.



Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm S trong không gian (S không trùng với A,B,C,D). Gọi E,F,H,K lần lượt là chân các đường phân giác trong góc S của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA . Chứng minh bốn điểm E,F,H,K đồng phẳng.

Lời giải.

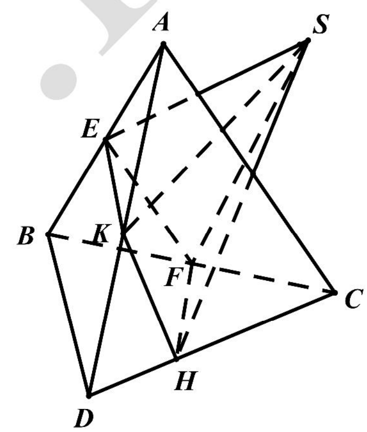
Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{EA}{EB}=\frac{SA}{SA},\frac{KD}{KA}=\frac{SD}{SA}$

$\frac{HC}{HD}=\frac{SC}{SD},\frac{FB}{FC}=\frac{SB}{SC}$

Suy ra $\frac{EA}{EB}.\frac{FB}{FC}.\frac{HC}{HD}.\frac{KD}{KA}$

$=\frac{SA}{SB}.\frac{SB}{SC}.\frac{SC}{SD}.\frac{SD}{SA}=1$ theo định lí Menelaus thì bốn điểm E,F,H,K đồng phẳng.



CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD,SA.

a) Chứng minh $(SBN)//(DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S,P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

47. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN)//(SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ//(SAB)$.

48. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE,AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF//(SAD)$.

49. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD,AF tại M',N'.

a) Chứng minh $(BCE)//(ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF)//(MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M,N thay đổi trên AC và BF.

50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB=3a, AD=CD=a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA=2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD,BC,SC,SD theo thứ tự tại M,N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x=AM$ $(0<x<a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I=MQ\cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J=MP\cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

51. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC),(B'AC),(C'AB)$.

52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA')//(B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác $BDA', B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a .Trên các cạnh $AB, CC', C'D'$ và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x(0 \le x \le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và ΔSAD vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD, SC, SB tại N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

55. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BB', BC$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

56. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N nằm trên AD', BD sao cho $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN // A'C$.

57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK)//(BB'C'C)$ và $(A'KG)//(AIB)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

58. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.

b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.
c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

59. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB,AC,DC,DB lần lượt tại M,N,P,Q.
a) Chứng minh MN,PQ,BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.
b) Đặt $AM=x,AN=y$. Chứng minh $a(x+y)=3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM+AN$.
c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s=x+y$.

60. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD=CD=BC=a$, $AB=2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB',CC',DD' lần lượt tại M,N,P.
a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?
b) So sánh AM và NP.