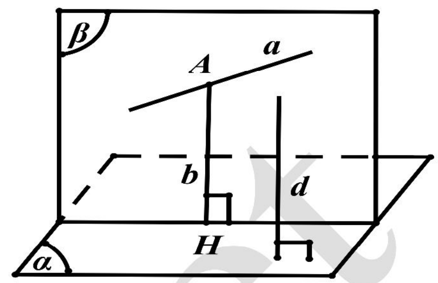
Bài toán 04: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Bài Toán: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α).Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α).



Để giải bài toán này ta làm theo các bước sau:

- Chọn một điểm $A \in a$
- Dựng đường thẳng b đi qua A và vuông góc với (α). Khi đó $mp(a,b)$ chính là mặt phẳng (β).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Goi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Xác định và tính thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

Lời giải.

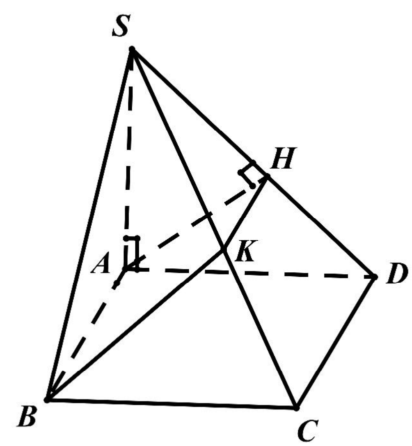
Kẻ $AH \perp SD$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$, lại có $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABH) \perp (SCD)$.

Vậy (ABH) chính là mặt phẳng (α).



Ta có $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ H \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = HK // AB // CD$. Thết diện là tứ giác $AHKB$.

Dễ thấy $AHKB$ là hình thang vuông tại A và H, nên $S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

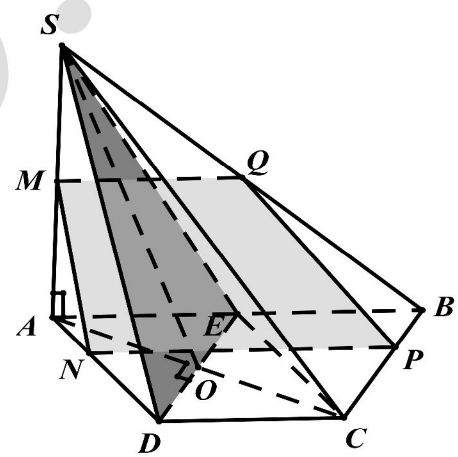
Trong ΔSCD có $HK // CD$ nên $\frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SH.SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2}$

$= \dfrac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \dfrac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4}CD = \dfrac{3}{4}a$.

Vậy $S_{AHKB} = \dfrac{1}{2}(AB + HK)AH = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{3a}{4}\right)\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 2.
a) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.
b) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (β).

Lời giải.
a) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì $ADCE$ là hình vuông có tâm là O.
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OD$, thêm nữa $OD \perp AC \Rightarrow OD \perp (SAC)$.
Từ đó ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SDO) \perp (SAC)$.
Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).
Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.



Ta có $SO = \sqrt{OA^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

$BC = DE = a\sqrt{2}$, do

$DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp AO \Rightarrow S_{SDE} = \dfrac{1}{2}SO.DE$

$= \dfrac{1}{2}.a\sqrt{\dfrac{3}{2}}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} AB \perp (SAD) \\ (\beta) \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \,//\, (\beta)$.

Vậy $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ AB \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MQ \,//\, AB, Q \in SB$.

Tương tự, $\begin{cases} N \in (\beta) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ AB \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (ABCD) = NP \,//\, AB, P \in BC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Do $\begin{cases} NP\,//\,AB \\ MQ\,//\,AB \end{cases} \Rightarrow NP\,//\,MQ \quad (1)$

Lại có $\begin{cases} MN \subset (SAD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(NP + MQ)MN$.

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$, $MQ = \frac{1}{2}AB = a$

$\frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} \Rightarrow NP = \frac{AB.DN}{DA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(2(a-x)+a\right)\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2} = \frac{(3a-x)\sqrt{a^2+4x^2}}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

64. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa các cặp đường thẳng:

a) OA và BC

b) AI và OC

65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

66. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2002)

67. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Xác định điểm O cách đều các điểm A, B, C, D và tính khoảng cách từ A đến (BCD).

68. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = b, AD = c$ và $BAC = CAD = DAB = 60^0$. Tính khoảng cách từ D đến (ABC).

69. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc $ABC = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2008)

71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD).

(Trích đề thi ĐH Khối D Năm 2007)

72. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a và $AC = a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, biết $SH \perp (ABCD)$ và $SH = a$. Tính khoảng cách

a) Từ O đến (SCD).

b) Từ A đến (SBC).

74. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SO\perp(ABCD)$, $AC=4, BD=2, SO=\sqrt{3}$. Tính

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

76. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, AD=BC=b, AC=BD=c$.
Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện.

77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh $MN\perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

(Trích đề thi ĐH Khối B Năm 2007)

78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$, cạnh $SA\perp(ABCD)$, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ S đến (BCM).

79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH\perp(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

80. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a, AC=2a, AA'=2a\sqrt{5}$ và $BAC=120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh $MB\perp MA'$ và tính khoảng cách từ A đến $(A'BM)$.