✍ DẠNG 4: Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn

1. Phương pháp giải.

Cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R

- Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}(x_0-a;y_0-b)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$
- Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I;\Delta)=R$ để xác định tiếp tuyến.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1)$; $B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA=2=R; IB=2\sqrt{5}>R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA}=(2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1)+0(y+1)=0$ hay $x=1$

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:
$a(x-1)+b(y-3)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow (a-2b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$$

\+ Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

\+ Nếu $3b=4a$, chọn $a=3$, $b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x=1$ và $3x+4y-15=0$

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0

Lời giải:

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R = 3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3;2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng

$-3x + 2y + c = 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-10 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \Leftrightarrow c = 10 \pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x + 2y + 10 \pm 3\sqrt{13} = 0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow (2a - 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2) \quad (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0 suy ra

$$\cos(\Delta;Ox) = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \cos 45^0 = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow a = b$$ hoặc

$a = -b$

TH1: Nếu $a = b$ thay vào (*) ta có $18a^2 = c^2 \Leftrightarrow \pm c = 3\sqrt{2}a$, chọn $a = b = 1 \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$

TH2: Nếu $a = -b$ thay vào (*) ta có

$$18a^2 = (4a + c)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = (3\sqrt{2} - 4)a \\ c = -(3\sqrt{2} + 4)a \end{array}\right.$$

Với $c = \;\; 3\sqrt{2} - 4 \;\; a$, chọn

$a = 1,\, b = -1,\, c = \;\; 3\sqrt{2} - 4 \;\; \Rightarrow \Delta : x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Với $c = - \;\; 3\sqrt{2} + 4 \;\; a$, chọn

$a = 1,\, b = -1,\, c = - \;\; 3\sqrt{2} + 4 \;\; \Rightarrow \Delta : x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là

$\Delta_{1,2} : x + y \pm 3\sqrt{2} = 0,\, \Delta_3 : x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$ và

$\Delta_4 : x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Ví dụ 3: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$C_1 \;\; : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và

$C_2 \;\; : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

Lời giải:

Đường tròn C_1 có tâm $I_1 \;\; 0;2$ bán kính $R_1 = 3$

Đường tròn C_2 có tâm $I_2 \;\; 3;-4$ bán kính $R_2 = 3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình

$\Delta : ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Δ là tiếp tuyến chung của C_1 và C_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = 3 \\ d(I_2, \Delta) = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|2b + c\right| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \;\; * \\ \left|3a - 4b + c\right| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Suy ra $\left|2b + c\right| = \left|3a - 4b + c\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ c = \dfrac{-3a + 2b}{2} \end{array}\right.$

TH1: Nếu $a = 2b$ chọn $a = 2,\, b = 1$ thay vào (*) ta được

$c = -2 \pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

TH2: Nếu $c = \dfrac{-3a + 2b}{2}$ thay vào (*) ta được $\left|2b - a\right| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow$

$a = 0$ hoặc $3a + 4b = 0$

+ Với $a = 0 \Rightarrow c = b$, chọn $b = c = 1$ ta được $\Delta : y + 1 = 0$

+ Với $3a + 4b = 0 \Rightarrow c = 3b$, chọn $a = 4,\ b = -3,\ c = -9$ ta được

$\Delta : 4x - 3y - 9 = 0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là :

$2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0, y + 1 = 0,\ 4x - 3y - 9 = 0$

3. Bài tập luyện tập

Bài 3.106: Cho đường tròn $C\ : x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn trong các trường hợp sau:

a) Điểm tiếp xúc là $M\ \ 2;1$

b) d đi qua A(3;6)

c) d song song với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 2008 = 0$

d) d vuông góc với đường thẳng $\Delta' : 2x - 3y - 4 = 0$

Bài 3.107: Cho đường tròn $C\ : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A\ \ 2;5$ .Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ A tới đường tròn. Giả sử tiếp tuyến này tiếp xúc với đường tròn tại hai điểm M, N. Hãy tính độ dài MN.

Bài 3.108: Cho $C\ : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*) biết tiếp tuyến cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho ΔABC có diện tích bằng 4.

Bài 3.109: Tìm toạ độ giao điểm của hai đường tròn:

$C_1\ \ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0,\ \ C_2\ : x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$

và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn ấy.

Bài 3.110 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d : x - y + 1 = 0$ và đường tròn $C\ : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng *d* mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $AMB = 60^0$.

Bài 3.111 Cho $C_m\ : x^2 + y^2 + 2mx - 2\ \ m - 1\ \ y + 1 = 0$

a) Tìm m để C_m là đường tròn

b) Tìm m để C_m tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x + y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$

c) Tìm m để từ điểm $A\ 7;0$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với C_m vuông góc với nhau.

d) Tìm m để từ điểm $A\ 7;0$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với C_m và tạo với nhau góc 60^0.

Bài 3.112 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn:

$(C_1) : x^2 + y^2 - 10x = 0, (C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(C_1), (C_2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d : x + 6y - 6 = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn $(C_1), (C_2)$.

Bài 3.113 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng *d* lần lượt có phương trình: (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$, $d : x + y - 1 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (C), biết A nằm trên d.

Bài 3.114 Trong mặt phẳng toạ độ cho đường tròn $C\ : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M\ -3;1$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng $T_1\ T_2$.

Bài 3.115 Cho đường tròn (C) có phương trình: $x - 3\ ^2 + y^2 = 4$
Tìm trên Oy điểm M mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) và 2 tiếp tuyến đó tạo thành góc 60^0