Bài toán 04: TÌM TẬP HỢP HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG HAY MỘT MẶT PHẲNG DI ĐỘNG.

Phương pháp:

Để giải các bài toán dạng này trước tiên ta cần nắm chắc lời giải của hai bài toán gốc sau:

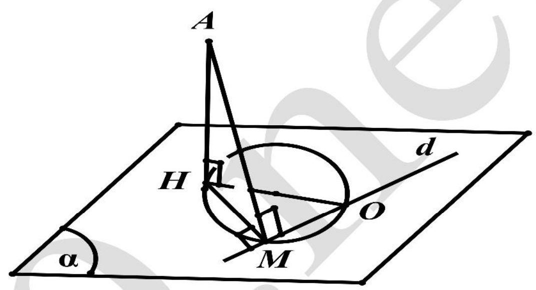
Bài Toán 1: Trong không gian cho (α) và hai điểm cố định A và O với $A \notin (\alpha)$, $O \in (\alpha)$, d là một đường thẳng di động trong (α) và luôn đi qua O. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d. Tìm tập hợp điểm H khi d di động.

Lời giải.

Dựng $AH \perp (\alpha)$ suy ra H cố định.

Ta có $\begin{cases} d \perp AH \\ d \perp AM \end{cases} \Rightarrow d \perp (AMH)$

$\Rightarrow d \perp HM$.

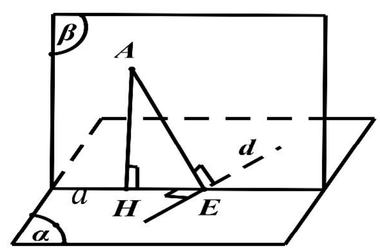


Trong mặt phẳng (α) điểm M nhìn đoạn OH cố định dưới một góc vuông suy ra M thuộc đường tròn đường kính OH trong (α).

Bài Toán 2: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A cố định (α) là mặt phẳng di động nhưng luôn chứa d. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên (α) khi (α) di động.

Lời giải.

Gọi (β) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d và $a = (\alpha) \cap (\beta)$. Trong (β) gọi H là hình chiếu của A trên a và $E = d \cap (\beta)$. Ta có A, E cố định và trong mặt phẳng (β) điểm H nhì đoạn AE dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

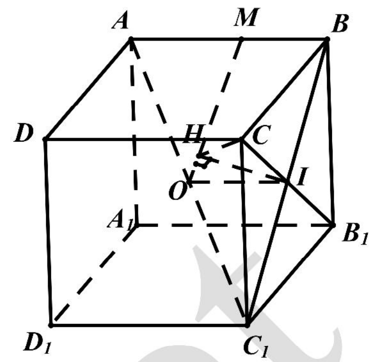


Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các mặt đều là hình vuông với O là tâm của hình hộp và M là một điểm chuyển động trên đoạn AB. Gọi H là hình chiếu của C xuống đường thẳng OM. Tìm quỹ tích điểm H

Lời giải.

Phần thuận.



Gọi $I = C_1B \cap BC_1$, do

$$\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow AB \perp CI$$

mà $CI \perp BC_1 \Rightarrow CI \perp (ABC_1D_1) \Rightarrow CI \perp OH$, mặt khác $OH \perp CH$ nên $OH \perp (CHI) \Rightarrow OH \perp IH$. Điểm H nhì đoạn thẳng OI cố định dưới một góc vuông đồng thời $H \in OM \subset (ABC_1D_1)$ cố định nên H thuộc đường tròn đường kính OI trong (ABC_1D_1).

Giới hạn.

Khi $M \equiv A$ thì $H \equiv H_1$ trong đó H_1 là hình chiếu của C trên AC_1.

Khi $M \equiv B$ thì $H \equiv H_2$ trong đó H_2 là hình chiếu của C trên D_1B.

Vậy H chạy trên cung H_1H_2

Phần đảo.

Giả sử H' là một điểm bất kì trên cung H_1H_2, ta chứng minh tồn tại điểm M' trên đoạn AB sao cho H' là hình chiếu của C trên OM'.

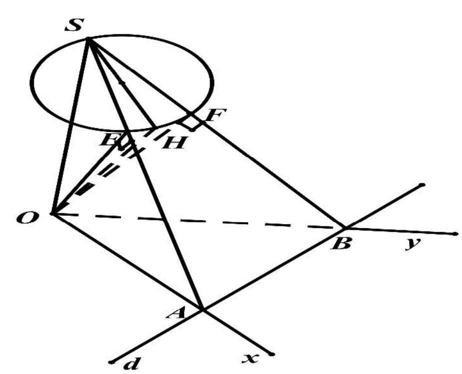
Gọi $M' = OH' \cap AB$. Dễ thấy $IC \perp (ABC_1) \Rightarrow IC \perp OM'$

Vậy $\begin{cases} OM' \perp IC \\ OM' \perp IH' \end{cases} \Rightarrow OM' \perp (ICH') \Rightarrow CH' \perp OM'$, hay H' là hình chiếu của C trên OM'.

Kết luận : Tập hợp điểm H là cung H_1H_2.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho một điểm O cố định , một đường thẳng d cố định không đi qua O, một góc vuông xOy quay xung quanh điểm O. Các tia Ox, Oy cắt d theo thứ tự tại A, B. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) và đi qua O, lấy một điểm S cố định . Dựng $OE \perp SA, OF \perp SB$. Tìm quỹ tích các điểm E và F khi vuông xOy quay xung quanh điểm O.

Lời giải.



Dựng $OH \perp (SAB)$ thì H cố định . Do $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH \perp SE$, mặt khác $OE \perp SE$ $\Rightarrow SE \perp (OEH) \Rightarrow SE \perp EH$. Điểm E nhìn đoạn SH cố định trong mặt phẳng $mp(S,d)$ nên E thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

Tương tự F thuộc đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$.

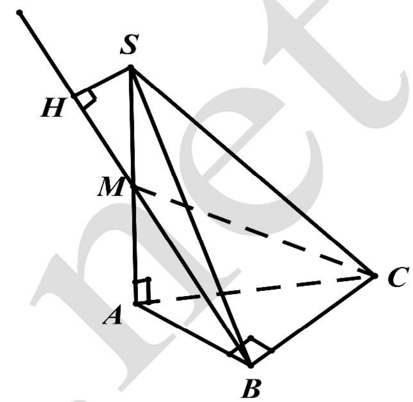
Phần đảo.(bạn đọc tự giải)

Vậy tập hợp các điểm E và F là đường tròn đường kính SH trong mặt phẳng $mp(S,d)$ bỏ đi hai điểm S và H.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi M là một điểm trên cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên (MBC) khi M di động trên đoạn SA.

Lời giải.

Phần thuận.



Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $SH \perp MB, H \in MB$, khi đó ta có

$\begin{cases} SH \subset (SAB) \\ BC \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (MBC)$ Vậy H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (MBC).

Trong mặt phẳng (SAB) điểm H nhì đoạn SB dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn (C) đường kính SB nằm trong (SAB).

Giới hạn.

Khi $M \equiv S \Rightarrow H \equiv S$.

Khi $M \equiv A \Rightarrow H \equiv A$.

Vậy M di động trên đoạn SA thì H di động trên cung nhỏ SA của đường tròn (C).

Phần đảo.

Gọi H' là một điểm bất kì trên cung nhỏ SA của đường tròn (C), gọi $M' = BH' \cap SA$. Ta có $\begin{cases} SH' \perp BM' \\ SH' \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH' \perp (M'BC)$ hay H' là hình chiếu của S trên (MBC).

Kết luận : Tập hợp các điểm H là cung nhỏ SA của đường tròn (C).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

26. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Chứng minh rằng :

a) $SO \perp (ABCD)$.

b) $AC \perp SD$.

28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$.

Chứng minh:

a) H là trực tâm của ΔABC.

b) ΔABC là tam giác nhọn.

c) $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

d) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$.

29. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường thẳng AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH và FK lần lượt là đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng :

a) ΔACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Chứng minh $IK \perp (SCD)$ và tính IK.

31. Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc . Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng DA, DB, DC với mặt phẳng (ABC).

Chứng minh $\left(2 + \cot^2 \alpha\right)\left(2 + \cot^2 \beta\right)\left(2 + \cot^2 \gamma\right) \geq 64$.

32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.Chứng minh :

a) $AC \perp (SHK)$

b) $CK \perp SD$.

33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a) AH, SK và BC đồng qui.

b) $SB \perp (CHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

34. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn đường kính cố định BC và M là điểm di động trên đường tròn này. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại B lấy một điểm A.
a) Chứng minh các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông.
b) Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B trên AM và AC. Chứng minh $AC \perp (BHK)$.
c) Tìm tập hợp điểm H khi M di động.
d) Tìm vị trí của M để đoạn AM lớn nhất.
e) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác BHK lớn nhất.

35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Chứng minh rằng :
a) $SH \perp (ABCD)$.
b) $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D và $SD = a\sqrt{5}$.
a) Chứng minh $SA \perp (ABCD)$. Tính SA.
b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt CB,CD lần lượt tại I,J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC .Gọi K,L là các giao điểm K,L của SB,SD với (HIJ). Chứng minh $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$
c) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM = x$ $(0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB
a) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α).
b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Xác định tiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện.

39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$.
a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).
b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

40. Cho tam giác ABC tại C có cạnh huyền nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với (P) các góc α,β. Tính góc giữa đường cao CK với (P).

41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $SO\perp(ABCD)$, đường thẳng SA tạo với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBC) các góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC).

a)Chứng minh $SO=AH$ và SA khi $HB=\frac{a}{2}$

b) Tính góc giữa đường thẳng SA với $(ABCD)$.

42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $SC=a$. Góc giữa đường thẳng SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) lần lượt là α và β.

a) Tính SA

b) Chứng minh $AB=a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

43. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của tứ diện. Gọi A,B,C là ba góc tương ứng của tam giác ABC.

Đặt $\alpha=AOH,\beta=BOH,\gamma=COH$. Chứng minh: $\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A}=\frac{\sin^2\beta}{\sin 2B}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

44. Cho tứ diện $ABCD$ có $BDC=90^0$. Hình chiếu H của D trên mặt phẳng ABC là trực tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh $CDA=90^0$.

b) $6\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)\ge\left(AB+BC+CA\right)^2$.

45. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc. M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{MA^2}{OA^2}+\frac{MB^2}{OB^2}+\frac{MC^2}{OC^2}$.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và α,β,γ lần lượt là góc gữa đường thẳng OH với các đường thẳng OA,OB,OC.

Chứng minh rằng: $\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma\le\frac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Tìm GTNN của $S=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos^2\gamma}+\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\cos^2\beta}$