Bài toán 05: DỰNG ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

Để dựng đường thẳng d đi qua O và cắt d_1, d_2 ta dựng giao tuyến của hai mặt phẳng $mp(O,d_1)$ và $mp(O,d_2)$, khi đó $d = mp(O,d_1) \cap mp(O,d_2)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, O là điểm huộc miền trong tam giác BCD, M là một điểm trên cạnh AB.

a) Dựng đường thẳng đi qua M cắt cả AO và CD.

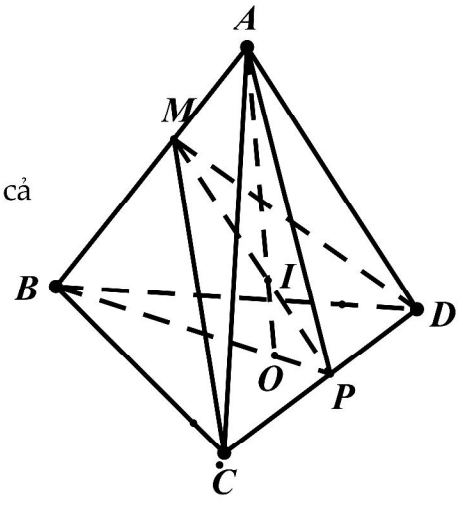
b) Gọi N là mộtđiểm trên cạnh BC sao cho ON không song song với BD. Dựng đường thẳng đi qua N cắt AO và DM.

Lời giải.

a) Trong (BCD) gọi $P = BO \cap CD$

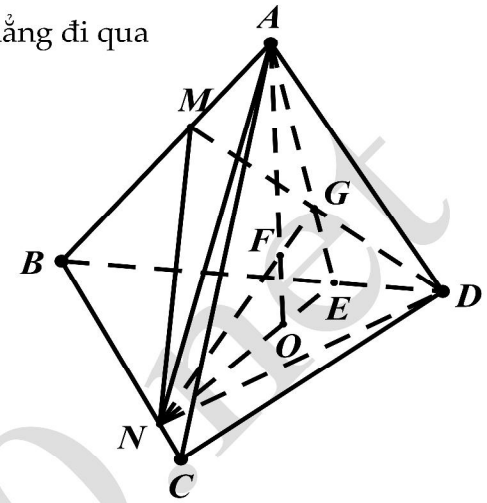
Trong (ABN) gọi $I = PM \cap AO$

Đường thẳng MP chính là đường thẳng đi qua M cắt cả AO và CD.



b) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $E = NO \cap BD$

Trong (ABD) gọi $G = MD \cap AE$, trong (NAE) gọi $F = AO \cap NG$, thì NG chính là đường thẳng đi qua N cắt cả AO và DM.



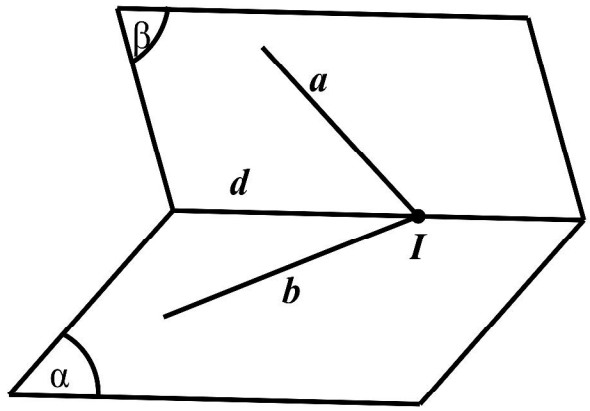
Bài toán 06: TÌM TẬP HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG VÀ BÀI TOÁN CHỨNG MINH GIAO TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

Phương pháp:

Để tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng thay đổi a, b ta chọn hai mặt phẳng cố định (α) và (β) cắt nhau lần lượt chứa a, b, khi đó

$$I = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} I \in a \subset (\alpha) \\ I \in b \subset (\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in d = (\alpha) \cap (\beta)$$



Vậy điểm I thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Để chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định ta thực hiện theo các bước sau

- Chọn một điểm cố định J thuộc hai mặt phẳng (δ) và (γ)
- Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng (δ) và (γ), khi đó d đi qua điểm cố định J.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB. Một mặt phẳng (P) quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại các điểm tương ứng E, F.

a) Tìm tập hợp giao điểm I của AF và BE.

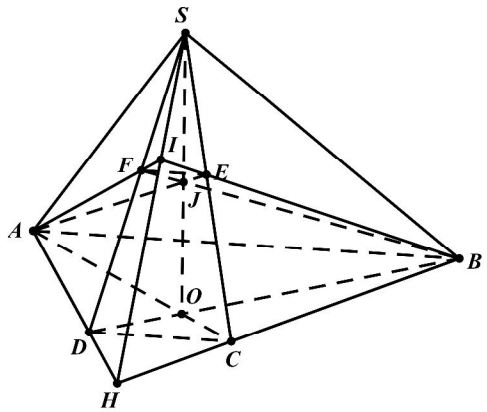
b) Tìm tập hợp giao điểm J của AE và BF.

Lời giải.

a) ***Phần thuận:***

Ta có $I = AF \cap BE \Rightarrow \begin{cases} I \in AF \\ I \in BE \end{cases}, \begin{cases} AF \subset (SAD) \\ BE \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$.



Trong $(ABCD)$ gọi

$H = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AD \\ H \in BC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in (SAD) \\ H \in (SBC) \end{cases}$.

$\Rightarrow SH = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in SH$.

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến D và I chạy đến H.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và I chạy đến S.

Phần đảo:

Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn SH, trong (SAH) gọi $F = SD \cap AI$, trong (SBH) gọi $E = SH \cap BI$ khi đó $(ABEF)$ là mặt phẳng quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại E, F và I là giao điểm của AF và BE.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn SH.

b) Ta có $J = AE \cap BF \Rightarrow \begin{cases} J \in AE \\ J \in BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$ Nhưng $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $J \in SO$.

Khi E chạy đến chạy đến C thì F chạy đến D và J chạy đến O.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và J chạy đến S.

Lập luận tương tự trên ta có tập hợp điểm J là đoạn SO.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABDC$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.

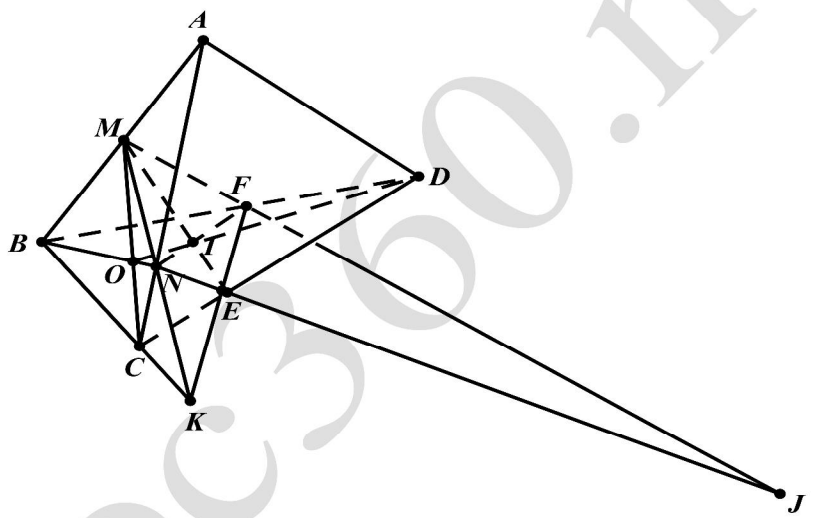
c) Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

Lời giải.

a) Trong (ABC) gọi $K = MN \cap BC$ thì K cố định và

$$\begin{cases} K \in MN \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (BCD) \end{cases}$$

Lại có $EF = (P) \cap (BCD) \Rightarrow K \in EF$ Vậy EF luôn đi qua điểm K cố định



b) ***Phần thuận:***

Trong (P) gọi $I = ME \cap NF \Rightarrow \begin{cases} I \in ME \subset (MCD) \\ I \in NF \subset (NBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MCD) \cap (NBD)$.

Gọi $O = CM \cap BN \Rightarrow OD = (MCD) \cap (NBD) \Rightarrow I \in OD$

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O

Khi Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Phần đảo:

Gọi I là điểm bất kì trên đoạn OD, trong (MCD) gọi $E = MI \cap CD$, trong (NBD) gọi $F = NI \cap BD$ suy ra $(MNEF)$ là mặt phẳng quay quanh MN căt các cạnh DB, DC tại các điểm E, F và $I = ME \cap NF$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn OD.

c) Gọi $J = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} J \in MF \subset (ADB) \\ J \in NE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ADB) \cap (ACD)$.

Mà $AD = (ADC) \cap (ADB)$.

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và J chạy đến A

Khi Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Từ đó ta có tập hợp điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD)

b) Gọi E,F là các điểm lần lượt trên các cạnh AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (DEF).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác $ABCD$, AB cắt CD tại E, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

3. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABD, N một điểm thuộc miền trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (BCD) và (AMN).

b) (ABC) và (DMN).

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 3PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (MNP).

5. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là các điểm lần lượt trên các cạnh SC,BC.

a) Tìm giao điểm của AM với (SBD).

b) Tìm giao điểm của SD với (SMN).

6. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O, A,B là hai điểm nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α) với (α). Một mặt phẳng (β) quay quanh AB cắt d và d' lần lượt tại M,N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi $I = AM \cap BN$, chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi $J = AN \cap BM$, chứng minh J thuộc một đường thẳng cố định.

d) Chứng minh IJ đi qua một điểm cố định.

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng CD với (IJK) và chứng minh $DE = DC$.

b) Xác định giao điểm F của đương thẳng AD với (IJK) và chứng minh $FA = 2FD$.

c) Chứng minh $FK // AB$.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của AM với (SBD). Tính $\frac{EM}{EA}$.

b) Tìm giao điểm F của SD với (MAB) và chứng minh F là trung điểm của SD.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I, C, D thẳng hàng và $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của AD với (MOG). Tính $\frac{JD}{JA}$.

c) Tìm giao điểm K của SA với (MOG). Tính $\frac{KS}{KA}$.

10. Cho mặt phẳng (α) xác định bởi hai đường thẳng a, b cắt nhau ở O và c là đường thẳng cắt (α) tại I $(I \neq O)$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $mp(O, c)$

b) Gọi M là một điểm trên c và không trùng với I. Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b) và chứng minh Δ luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AMN)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN).

12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J lần lượt là các điểm cố định trên các cạnh SA và SC (IJ không song song với AC).

Một mặt phẳng (α) quay quanh IJ cắt SB tại M và cắt SD tại N.

a) Chứng minh các đường thẳng MN, IJ, SO đồng qui

b) Giả sử $AD \cap BC = E, IN \cap JM = F$. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

c) Gọi $P = IN \cap AD, Q = JM \cap BC$. Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

13. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh AB, BC, CS lấy các điểm M, N, P sao cho MN và AC không song song với nhau.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

b) Gỉa sử $I = MP \cap NQ$, chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P chạy trên cạnh SC.

14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là một điểm trên cạnh SD sao cho $SM = \frac{1}{3}SD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng BM với (SAC).

b) N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến d của (SBC) và (AMN). Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với (MNG).

15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) căt các cạnh bên SA, SB, SC tương ứng tại các điểm A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tìm giao điểm D' của (α) với SD.

b) Chứng minh $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J là hai điểm trên các cạnh AD và SB.

a) Tìm giao các điểm K, L của các đường thẳng IJ và DJ với (SAC).

b) Giả sử $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên

cạnh SC với $JS > JC$. Gọi (α) là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt các cạnh SD, SB tại M, N. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

18. Cho tứ diện $ADCD$ thỏa mãn điều kiện $AB.CD = AC.BD = AD.CB$. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng qui tại một điểm.