✍ Dạng 4. Các bài toán định tính về ba đường cônic.

1. Phương pháp giải.

Dựa vào phương trình chính tắc của ba đường cônic và giả thiết để thiết lập và chứng minh một số các tính chất của ba đường cônic.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và hai điểm M, N thuộc (E) sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

b) Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

a) + Dễ thấy một trong hai điểm trùng với bốn đỉnh của (E) thì đẳng thức hiển nhiên đúng

+ Nếu cả hai điểm không trùng với các đỉnh của (E):

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$, $N\left(x_N;y_N\right)$, $k\left(k\neq 0\right)$ là hệ số góc của đường thẳng OM thì hệ số góc của ON là $-\frac{1}{k}$ (vì OM vuông góc với ON).

Do $M, N\in\left(E\right)$ nên $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ (1), $\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{y_N^2}{b^2}=1$ (2)

Đường thẳng OM có phương trình là $y=kx$ suy ra $y_M=kx_M$ (3)

Đường thẳng ON có phương trình là $y=-\frac{1}{k}x$ suy ra $y_N=-\frac{1}{k}x_N$ (4)

Thay (3) vào (1) suy ra

$$\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{k^2x_M^2}{b^2}=1\Leftrightarrow x_M^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1\Leftrightarrow x_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$$

$$\Rightarrow y_M^2 = k^2 x_M^2 = \frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2 + b^2}$$

Do đó $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \dfrac{a^2b^2 \quad k^2 + 1}{a^2k^2 + b^2}$

Tương tự thay (4) vào (2) suy ra

$$\frac{x_N^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{k^2}x_N^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_N^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{k^2b^2}\right) = 1 \Leftrightarrow x_N^2 = \frac{a^2k^2b^2}{a^2 + k^2b^2}$$

$$\Rightarrow y_N^2 = \frac{1}{k^2}x_N^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + k^2b^2}$$

Do đó $ON^2 = x_N^2 + y_N^2 = \dfrac{a^2b^2 \quad k^2 + 1}{a^2 + k^2b^2}$

Suy ra

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{b^2 + k^2a^2}{a^2b^2 \quad k^2 + 1} + \frac{a^2 + k^2b^2}{a^2b^2 \quad k^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2 \quad k^2 + 1}{a^2b^2 \quad k^2 + 1} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

.

Vậy $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

b) Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng MN khi đó OH là đường cao của tam giác vuông MON. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính

$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có các tiêu điểm F_1, F_2. Lấy M là điểm bất kì trên (H). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là hằng số.

Lời giải.

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$

$\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ hay $bx + ay = 0$

Giả sử $M\left(x_M; y_M\right)$ khi đó theo công thức khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng ta có

$$d\left(M;\Delta_1\right) = \frac{\left|bx_M - ay_M\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ;\ d\left(M;\Delta_2\right) = \frac{\left|bx_M + ay_M\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Suy ra

$$d\left(M;\Delta_1\right)d\left(M;\Delta_2\right) = \frac{\left|bx_M - ay_M\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\frac{\left|bx_M + ay_M\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2x_M^2 - a^2y_M^2}{a^2 + b^2}$$

Mặt khác M thuộc (H) nên : $\frac{{x_M}^2}{a^2} - \frac{{y_M}^2}{b^2} = 1$ hay $b^2x_M^2 - a^2y_M^2 = a^2b^2$

Do đó $d\left(M;\Delta_1\right)d\left(M;\Delta_2\right) = \frac{a^2.b^2}{a^2 + b^2}$ là hằng số

Ví dụ 3. Cho parabol (P): $y^2 = 2ax$. Đường thẳng Δ bất kỳ đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k\left(k \neq 0\right)$ cắt (P) tại M và N. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M và N đến trục Ox là hằng số.

Lời giải

Tiêu điểm $F\left(a;0\right)$. Vì đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k \neq 0$ nên có phương trình: $\Delta : y = k\left(x - \frac{a}{2}\right)$

Hoành độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của phương trình:

$$k^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=2ax \Leftrightarrow 4k^2x^2-4\left(2a+k^2a\right)x+k^2a^2=0 \quad (*)$$

$$\Delta'=4\left(2a+k^2a\right)^2-4k^4a^2=16a^2\left(1+k^2\right)>0$$

Theo định lý Viet có $x_M.x_N=\frac{a^2}{4}$

Mặt khác ta có $d\left(M;Ox\right)=\left|y_M\right|;\ d\left(N;Ox\right)=\left|y_N\right|$

Suy ra $d\left(M;Ox\right).d\left(N;Ox\right)=\left|y_M.y_N\right|=\sqrt{4a^2\left|x_M.x_N\right|}=a^2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.155: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ với các tiêu điểm F_1, F_2 và A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tùy ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H . Chứng minh rằng

a) $OM^2+MF_1.MF_2=a^2+b^2$

b) $\left(MF_1-MF_2\right)^2=4\left(OM^2-b^2\right)$

c) $a^2HM^2+b^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2}=0$

Bài 3.156: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$, tiêu điểm $F\left(c;0\right)$, một đường thẳng Δ quay quanh F, cắt (E) tại M, N. Chứng minh rằng $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi.

Bài 3.157: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ với các tiêu điểm F_1, F_2. M là điểm chạy trên (E). Phân giác góc F_1MF_2 cắt F_1F_2 tại N, H là hình chiếu của N trên MF_1. Chứng minh rằng MH không đổi.

Bài 3.158: Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với các tiêu điểm F_1, F_2 và A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tùy ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là H . Chứng minh rằng

a) $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$

b) $\left(MF_1 + MF_2\right)^2 = 4\left(OM^2 + b^2\right)$

c) $a^2HM^2 = b^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$

Bài 3.159: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với các tiêu điểm $F_1\left(-c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 = a^2$, Δ là một trong hai tiệm cận của (H), Δ cắt (C) tại $E_1, E_2\left(x_{E_1} < 0; x_{E_2} > 0\right)$. Một đường thẳng song song với trục tung cắt (H) tại M và cắt Δ tại N. Chứng minh rằng $NE_1 = MF_1; NE_2 = MF_2$.

Bài 3.160: Cho parabol (P) : $y^2 = 2px\left(p > 0\right)$ và đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm M và N. Gọi $\alpha = \left(\vec{i};\overrightarrow{FM}\right)\left(0 < \alpha < \pi\right)$

a) Tính FM, FN theo p và α

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh F thì $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ không đổi

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM.FN$ khi α thay đổi

Bài 3.161: Cho parabol (P) có đường chuẩn Δ và tiêu điểm F. Gọi M, N là hai điểm trên (P) sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua F

Bài 3.162: (ĐH 2008D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 16x$ và điểm $A\left(1;4\right)$. hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $BAC = 90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng

BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3.163: Cho đường tròn đường kính AB tâm O. Một dây cung MN chuyển động và luôn vuông góc với AB tại H, I là điểm thuộc đoạn HM sao cho $HI = k.HM,\ 0 < k < 1$. Tìm tập hợp điểm I.

Bài 3.164: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P): $y^2 = 4x$. M là một điểm di động trên (P). $M \neq O$, T là một điểm trên (P) sao cho $T \neq O, OT$ vuông góc với OM.

a. Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì đường thẳng MT luôn đi qua một điểm cố định.

b. Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì thì trung điểm I của MT chạy trên 1 parabol cố định .

Bài 3.165: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho parabol $(P): y^2 = 4x$ có tiêu điểm F. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{FM} = -3\overrightarrow{FO}$; d là đường thẳng bất kì đi qua M, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác vuông.