

☞ **DẠNG 4: Xác định tọa độ các điểm của một hình**

1. Phương pháp.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

+ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

+ $\vec{u} \ x; y = \vec{u}' \ x'; y' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2).

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

b) Xác định trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm điểm D sao cho ABCD là hình bình hành

Lời giải

a) C là trung điểm của MB suy ra $x_C = \frac{x_M + x_B}{2} \Rightarrow x_M = 2x_C - x_B = -5$

và $y_C = \frac{y_M + y_B}{2} \Rightarrow y_M = 2y_C - y_B = 6$

Vậy M (-5;6)

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 - 1 - 3}{3} = -\frac{2}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 - 2 + 2}{3} = \frac{1}{3}$

Vậy $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

c) Gọi D(x;y) $\Rightarrow \vec{DC} = (-3 - x; 2 - y)$

Ta có: ABCD là hình bình hành suy ra

$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = -3 \\ 2 - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(0;5).$

Vậy D (0;5)

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho A 3;-1 , B -1;2 và I 1;-1 . Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa tâm O của hình bình hành ABCD .

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên

$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$

$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$

suy ra C (1;-4)

Tứ giác ABCD là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 3 = 1 - x_D \\ 2 + 1 = -4 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(5; -7)$$

Điểm O của hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm AC do đó

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow O\left(2; -\frac{5}{2}\right)$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.89: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;-2)$

- Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Bài 1.90: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;4)$, $B(-1;2)$, $I(4;1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và I là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa độ tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Bài 1.91: Cho tam giác ABC có $A(3;1)$, $B(1;-3)$, đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ đỉnh C

Bài 1.92: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Biết $M(1;1)$, $N(-2;-3)$, $P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Bài 1.93: Cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$. A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A.

- Tìm tọa độ các điểm A', B', C'
- Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

✎ **DẠNG 5: Bài toán liên quan đến sự cùng phương của hai vector. Phân tích một vector qua hai vector không cùng phương.**

1. Phương pháp.

- Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$. Vector \vec{u}' cùng phương với vector \vec{u} ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Chú ý: Nếu $xy \neq 0$ ta có \vec{u}' cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$

- Để phân tích $\vec{c} = c_1; c_2$ qua hai vector $\vec{a} = a_1; a_2$, $\vec{b} = b_1; b_2$ không cùng phương, ta giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0)$; $\vec{c} = (-1; 3)$

- Chứng minh hai vector \vec{a} ; \vec{b} không cùng phương
- Phân tích vector \vec{c} qua \vec{a} ; \vec{b}

Lời giải

a) Ta có $\frac{-3}{1} \neq \frac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ và \vec{b} không cùng phương

b) Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Ta có $x\vec{a} + y\vec{b} = (x - 3y; 2x)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

Ví dụ 2: Cho $\vec{u} = (m^2 + m - 2; 4)$ và $\vec{v} = (m; 2)$. Tìm m để hai vector \vec{u}, \vec{v} cùng phương.

Lời giải

+ Với $m = 0$: Ta có $\vec{u} = (-2; 4)$; $\vec{v} = (0; 2)$

Vì $\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{4}$ nên hai vector $\vec{u}; \vec{v}$ không cùng phương

+ Với $m \neq 0$: Ta có $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{m^2 + m - 2}{m} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = -1$ và $m = 2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(6; 3)$, $B(-3; 6)$, $C(1; -2)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.
- Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.
- Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$
- Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = -9; 3$, $\overrightarrow{AC} = -5; -5$. Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ suy ra \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành $\Rightarrow D = x; 0$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AD} không cùng phương

Mặt khác $\overrightarrow{AD} = x - 6; -3$ do đó $\frac{x-6}{-9} = \frac{-3}{3} \Rightarrow x = 15$

Vậy $D = 15; 0$

c) Vì E thuộc đoạn BC và $BE = 2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$

Gọi $E = x; y$ khi đó $\overrightarrow{BE} = x + 3; y - 6$, $\overrightarrow{EC} = 1 - x; -2 - y$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x + 3 = 2(1 - x) \\ y - 6 = 2(-2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $E = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

d) Gọi $I = x; y$ là giao điểm của DE và AC.

Do đó $\overrightarrow{DI} = x - 15; y$, $\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{46}{3}; \frac{2}{3}\right)$ cùng phương suy ra

$$\frac{3(x-15)}{-46} = \frac{3y}{2} \Rightarrow x + 23y - 15 = 0 \quad (1)$$

$\overrightarrow{AI} = x - 6; y - 3$, $\overrightarrow{AC} = -5; -5$ cùng phương suy ra $\frac{x-6}{-5} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow x - y - 3 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{7}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$

Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là $I = \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A = 1; -2$, $B = 0; 3$, $C = -3; 4$ và $D = -1; 8$.

a) Bộ ba trong 4 điểm trên bộ nào thẳng hàng

b) Chứng minh \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} không cùng phương

c) Phân tích \overrightarrow{CD} qua \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC}

Bài 1.95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A = 0; 1$, $B = 1; 3$, $C = 2; 7$ và $D = 0; 3$.

Tìm giao điểm của 2 đường thẳng AC và BD

Bài 1.96. Cho $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$

a) Chứng minh \vec{a} và \vec{b} không cùng phương

b) Đặt $\vec{u} = (2 - x)\vec{a} + (3 + y)\vec{b}$. Tìm x, y sao cho \vec{u} cùng phương với $x\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Bài 1.97. Cho tam giác ABC có $A(3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(-1; -2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$

Bài 1.98. Cho ba điểm $A(-1; -1)$, $B(0; 1)$, $C(3; 0)$

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

b) Xác định tọa độ điểm D biết D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD = 5DC$.

c) Xác định tọa độ giao điểm của AD và BG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 1.99. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai điểm A và B là nhỏ nhất, biết:

a) A 1;1 và B 2;-4

b) A 1;2 và B 3;4

Bài 1.100: Cho hình bình hành ABCD có A -2;3 và tâm I 1;1. Biết điểm K -1;2 nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành.