✍ DẠNG 4: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp giải.

- Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vectơ là $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

+ Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

- Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

+ Nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A\ 1;2$, $B\ -2;6$, $C\ 9;8$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{AB}\ -3;4$, $\overrightarrow{AC}\ 8;6$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3.8 + 4.6 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}\ 11;2$, $\overrightarrow{BA}\ 3;-4$

Suy ra $\cos B = \cos\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\ = \dfrac{11.3 + 2.\ -4}{\sqrt{11^2 + 2^2}\sqrt{3^2 +\ -4\ ^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) Gọi $H\ x; y$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}\ x-1; y-2$, $\overrightarrow{BH}\ x+2; y-6$, $\overrightarrow{BC}\ 11;2$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11\ x-1\ +2\ y-2\ = 0$

Hay $11x + 2y - 15 = 0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\dfrac{x+2}{11} = \dfrac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \dfrac{1}{5}$, $y = \dfrac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{32}{5}\right)$

Ví dụ 2: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I\ 1;1$, đỉnh $A\ 3;2$ và đỉnh B nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Lời giải:

Vì B nằm trên trục hoành nên giả sử $B\ 0; y$

Vì I là tâm hình thoi $ABCD$ nên I là trung điểm của AC và BD

Suy ra $C =\ 2x_I - x_A; 2y_I - y_A\ =\ -1;0$, $D =\ 2x_I - x_B; 2y_I - y_B\ =\ 2;2-y$

Do đó $AB = AD \Leftrightarrow AB^2 = AD^2 \Leftrightarrow 9 + (y-2)^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow y = 3$

Vậy $B(0;3)$, $C(-1;0)$, $D(2;-1)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $AMB = 45^0$

Lời giải:

Giả sử $M(x;y)$ suy ra $\overrightarrow{MA}(3-x;4-y)$, $\overrightarrow{MB}(2-x;1-y)$, $\overrightarrow{BC}(-3;-3)$

Vì $AMB = 45^0$ suy ra $\left|\cos AMB\right| = \left|\cos(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BC})\right|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3(3-x) - 3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}\sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = |x + y - 7| \ (*)$$

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Suy ra $\frac{2-x}{-3} = \frac{1-y}{-3} \Leftrightarrow x = y + 1$ thế vào (*) ta được

$$\sqrt{(2-y)^2 + (4-y)^2} = |2y - 6| \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = 4$$

+ Với $y = 2 \Rightarrow x = 3$, ta có $\overrightarrow{MA}(0;2)$, $\overrightarrow{MB}(-1;-1)$ $\Rightarrow \cos AMB = \cos(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $AMB = 135^0$ (không thỏa mãn)

+ Với $y = 4 \Rightarrow x = 5$, $\overrightarrow{MA}(-2;0)$, $\overrightarrow{MB}(-3;-3)$ $\Rightarrow \cos AMB = \cos(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $AMB = 45^0$

Vậy $M(5;4)$. là điểm cần tìm.

Ví dụ 4: Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \ge 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1.(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}$

$= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$

Vì $c > 0$ nên $-2b + 5 > 0 \Rightarrow 0 \le b < \frac{5}{2}$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \le x < \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5	1	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^2-4x+5$ với $0\le x<\frac{5}{2}$ là $y=5$ khi $x=0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b=0$, suy ra $c=5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.46: Cho hai vectơ $\vec{a}(0;4)$; $\vec{b}(4;-2)$

a) Tính cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

b) Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}$ biết $(\vec{a}+2\vec{b}).\vec{c}=-1$ và $(-\vec{b}+2\vec{c}).\vec{a}=6$

Bài 2.47: Cho tam giác ABC có $A(5;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;5)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC

b) Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ A.

c) Tính diện tích tam giác ABC

Bài 2.48: Cho tam giác ABC với $A\ 3;1$, $B\ -1;-1$, $C\ 6;0$.

a) Tính góc A của tam giác ABC

b) Tính tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC.

Bài 2.49: Cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2.50. Các điểm $B\ -1;3$, $C\ 3;1$ là hai đỉnh của một tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm tọa độ đỉnh A.

Bài 2.51: Cho bốn điểm $A\ -8;0$, $B\ 0;4$, $C\ 2;0$, $D\ -3;-5$. Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Bài 2.52: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A\ -2;-1$, $B\ 2;-4$.

a) Tìm trên trục Oy điểm M sao cho $MBA=45^0$.

b) Tìm trên trục Ox điểm N sao cho $NA=NB$

Bài 2.53: Cho hai điểm $A\ 4;-3$, $B\ 3;1$. Tìm M trên trục hoành sao cho $AMB=135^0$.

Bài 2.54: Biết $A\ 1;-1$, $B\ 3;0$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D

Bài 2.55. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm $A\ 1;4$, $B\ -2;-2$ và $C\ 4;2$ .Xác định tọa độ điểm M sao cho tổng $MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất.