- **DẠNG TOÁN 4: Một số bài toán liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai.**

1. Phương pháp giải và các ví dụ minh họa.

- **Bài toán 1:** Tìm điều kiện để hai phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ và $a'x^2+b'x+c'=0$ có nghiệm chung. Chúng ta làm như sau:

Bước 1: Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là x_0 thì $\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=0 \\ a'x_0^2+b'x_0+c'=0 \end{cases}$

Giải hệ tìm được x_0,suy ra giá trị của tham số

Bước 2: Thế giá trị của tham số tìm được vào hai phương trình để kiểm tra và kết luận.

Ví dụ 1:Tìm tất cả các giá trị của a để hai phương trình $x^2+ax+1=0$ và $x^2+x+a=0$ có nghiệm chung

Lời giải:

Điều kiện cần: Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2+ax_0+1=0 \\ x_0^2+x_0+a=0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)x_0+1-a=0$$

Nếu $a=1$ thay vào hai phương trình ta thấy chúng vô nghiệm

Nếu $a\neq 1$ thì $x_0=1 \Rightarrow a=-2$

Điều kiện đủ: Với $a=-2$ thì hai phương trình trở thành $x^2-2x+1=0$ và $x^2+x-2=0$

Giải hai pt này ta thấy chúng có nghiệm chung là $x=1$

Vậy $a=-2$ là giá trị cần tìm

Ví dụ 2*:*Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(x^2-2mx+m-1)(x^2-3x+2m)=0$ có bốn nghiệm phân biệt

Lời giải:

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} x^2-2mx+m-1=0 \quad (1) \\ x^2-3x+2m=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Phương trình đầu có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai phương trình (1) và (2) mỗi phương trình phải có hai nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

* Ta có $\Delta'_1=m^2-m+1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0, \forall m$ nên phương trình (1) có nghiệm với mọi m .

Do đó điều kiện để cả hai phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt là

$\Delta_2=9-8m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{9}{8}.$

* Giả sử hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + m - 1 = 0 \\ x_0^2 - 3x_0 + 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 - \left(3x_0 - x_0^2\right).x_0 + \frac{3x_0 - x_0^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_0^3 - 5x_0^2 + 3x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow m = 1$$

Với $m = 1$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}\right.$, phương trình (2) trở thành

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix}\right.$ do đó $m = 1$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Suy ra để khi hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung là $m \neq 1$.

Vậy để phương trình đầu có bốn nghiệm phân biệt thì $m < \frac{9}{8}$ và $m \neq 1$.

- **Bài toán 2**: **Chứng minh trong các phương trình bậc hai có ít nhất một phương trình có nghiệm**

Để giải quyết bài toán này chúng ta sẽ đi chứng minh tổng các biệt thức Delta là một số không âm.

Ví dụ 3: Cho các số dương a,b,c thỏa mãn diệu kiện $a + 2b + 3c = 1$ .Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$4x^2 - 4\left(2a + 1\right)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$$
$$4x^2 - 4\left(2b + 1\right)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$$

Lời giải

Hai phương trình trên lần lượt có $\Delta_1' = 16a\left(1 - 48bc\right), \Delta_2' = 16b\left(1 - 24ac\right)$

Vì a,b là các số dương nên Δ_1', Δ_2' lần lượt cùng dấu với $1 - 48bc$ và $1 - 24ac$

Mặt khác ta lại có $1 - 48bc + 1 - 24ac = 2 - 24c\left(a + 2b\right) = 2 - 24c\left(1 - 3c\right) = 2\left(6c - 1\right)^2 \geq 0$

Dẫn đến $\Delta_1' + \Delta_2' \geq 0$

Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Ví dụ 4: Cho các số a,b,c thỏa mãn điệu kiện $a + b + c = 6$ .Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + 1 = 0$$
$$x^2 + bx + 1 = 0$$
$$x^2 + cx + 1 = 0$$

Lời giải

Ba pt trên lần lượt có $\Delta_1 = a^2 - 4,\ \Delta_2 = b^2 - 4$, $\Delta_3 = c^2 - 4$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau $b^2 + c^2 \geq \dfrac{(b+c)^2}{2}$

Suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq a^2 + \dfrac{(b+c)^2}{2} - 12 = a^2 + \dfrac{(6-a)^2}{2} - 12$

Mặt khác $a^2 + \dfrac{(6-a)^2}{2} - 12 = \dfrac{3(a-2)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0$

Do đó có ít nhất một trong ba biệt thức $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ không âm

Vậy với a, b, c thỏa mãn điệu kiện $a + b + c = 6$ thì có ít nhất một trong ba phương trình có nghiệm

- **Bài toán 3: Chứng minh bất đẳng thức có chứa các hệ số của phương trình bậc hai với nghiệm của nó có điều kiện.**

Để làm xuất hiện điều kiện ràng buộc đối với hệ số phương trình bậc hai ta thường dựa trên

+ Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4ac$.

+ Sử dụng định lí Viét và điều kiện nghiệm của đề bài đã cho để suy ra ràng buộc của hệ số a, b, c.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 \leq 1$. Chứng minh rằng:

a) $c \leq \dfrac{1}{4}$.

b) $b(c+1) \geq 5c$.

Chứng minh.

a) Ta có $c = x_1x_2 \leq \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$.

c) Thay $b = x_1 + x_2, c = x_1x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$(x_1 + x_2)(x_1x_2 + 1) \geq 5x_1x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + x_1 + x_2 \geq 5$

Ta c ó: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + x_1 + x_2 = x_1 + \dfrac{1}{4x_1} + x_2 + \dfrac{1}{4x_2} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right) \geq 1 + 1 + \dfrac{3}{4}\dfrac{4}{x_1 + x_2} \geq 5.$

Ví dụ 6: Cho phương trình $x^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 \geq 1$.

a) Chứng minh rằng: $b^2 - 2c \geq \frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2bc - b^3 - 3b + 1$.

Lời giải.

a) Thay $b = x_1 + x_2, c = x_1x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)^2 \geq \frac{1}{2}$.

b) Theo giả thiết ta có: $b \geq 1, c \leq \frac{b^2}{4}$ nên $P \leq -\frac{b^3}{2} - 3b + 1 \leq -\frac{1}{2} - 3 + 1 = -\frac{5}{2}$.

Vậy $P_{MAX} = -\frac{5}{2}$ khi $b = 1, c = \frac{1}{4}$.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 3.18: Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung $x^2 - 2mx - 4m + 1 = 0$ (1) và $x^2 + \left(3m + 1\right)x + 2m + 1 = 0$ (2).

Bài 3.19: Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + mx + n = 0$ có nghiệm chung thì $\left(n - b\right)^2 = \left(m - a\right)\left(an - bm\right)$.

Bài 3.20: Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình có nghiệm $ax^2 + 2bx + c = 0$ (1); $bx^2 + 2cx + a = 0$ (2); $cx^2 + 2bx + b = 0$ (3).

Bài 3.21: Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 x_2 \geq 1$.

a) Chứng minh rằng: $b^2 \geq 4$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3b^2 - 4c + b + 2}{b^2 + 1}$.

Bài 3.22: Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}$

Bài 3.23: Cho phương trình bậc hai $ax^2 - x + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2 - c}{a^2c - a^3}$.