➢ DẠNG TOÁN 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

1. Phương pháp giải.

Trong một phương trình mà có hai đại lượng có mối liên hệ với nhau thì ta đặt mỗi đại lượng ấy là một ẩn mới từ đó ta đưa về được hệ phương trình(dễ dàng giải được) có được từ mối liên hệ hai đại lượng đó và phương trình ban đầu. Giải hệ phương trình từ đó tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{20+x}+\sqrt{16-x}=6$ b) $\sqrt[3]{2\left(x-2\right)}+\sqrt[4]{4\left(x+2\right)}=2$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\le 16$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{20+x} \\ v=\sqrt{16-x} \end{cases}$ suy ra $u\le \sqrt[3]{36},\ v\ge 0$ và $u^3+v^2=36$

Khi đó phương trình trở thành $u+v=6$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=6 \\ u^3+v^2=36 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u^3+(6-u)^2=36 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u(u^2+u-12)=0\ (*) \end{cases}$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=3 \\ u=-4 \end{array}\right.$ thỏa mãn $u\le \sqrt[3]{36}$.

Với $u=0\Rightarrow 0=\sqrt[3]{20+x}\Leftrightarrow x=-20$, $u=3\Rightarrow 3=\sqrt[3]{20+x}\Leftrightarrow x=7$ và $u=-4\Rightarrow -4=\sqrt[3]{20+x}\Leftrightarrow x=-84$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-20; x=-84; x=7$.

b) ĐKXĐ: $\mathrm{x}\ge -2$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{2\left(x-2\right)} \\ v=\sqrt[4]{4\left(x+2\right)} \end{cases}$ suy ra $u\ge 0, v\ge 0$ và $v^4-2u^3=16$

Khi đó phương trình trở thành $u+v=2$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=2 \\ v^4-2u^3=16 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ v^4-2\left(2-v\right)^3=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ v^4+2v^3-12v^2+24v-32=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ \left(v-2\right)\left(v^3+4v^2-4v+16\right)=0 \end{cases}\left(*\right)$

Vì $v^3 + 4v^2 - 4v + 16 = v^3 + \left(2v - 1\right)^2 + 15 > 0$ nên hệ phương trình

$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - v \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Ta có $u = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2\left(x - 2\right)} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$

Nhận xét : Khi gặp phương trình có chứa các đại lượng $\sqrt{a + f\left(x\right)}, f\left(x\right)$ và $\sqrt{b - f\left(x\right)}$ (hoặc $\sqrt{b + f\left(x\right)}$) thì ta đặt $u = \sqrt{a + f\left(x\right)}, v = \sqrt{b - f\left(x\right)}$ (hoặc $v = \sqrt{b - f\left(x\right)}$) và đưa về hệ phương trình $\begin{cases} g\left(u;v\right) = c \\ u^2 + v^2 = a + b \end{cases}$ (hoặc $\begin{cases} g\left(u;v\right) = c \\ u^2 - v^2 = a - b \end{cases}$). Giải hệ tìm được u, v từ đó giải phương trình $u = \sqrt{a + f\left(x\right)}$ hoặc $v = \sqrt{b \pm f\left(x\right)}$ tìm được x.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{13 + 2x} + \sqrt[3]{13 - 2x} - 2\sqrt[3]{169 - 4x^2} = 8$

b) $x + \sqrt[3]{4 - x^3} = 2 + 3x\sqrt[3]{4 - x^3}$

c) $\left(15x^2 + 6\right)\sqrt{3\left(x^2 + 2\right)} = 25x^3 + 36x + 2$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{13 + 2x} \\ v = \sqrt[3]{13 - 2x} \end{cases} \Rightarrow u^3 + v^3 = 26$

Phương trình trở thành $u + v - 2uv = 8$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3 + v^3 = 26 \\ u + v - 2uv = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u + v\right)^3 - 3uv\left(u + v\right) = 26 \\ u + v - 2uv = 8 \end{cases}$ (*)

Đặt $\begin{cases} S = u + v \\ P = uv \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$, hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases} S^3 - 3SP = 26 \\ S - 2P = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} 2S^3 - 3S\left(S - 8\right) = 52 \\ 2P = S - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S^3 - 3S^2 + 24S - 52 = 0 \\ 2P = S - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = -3 \end{cases}$

Thay vào ta có $\begin{cases} 2 = u + v \\ -3 = uv \end{cases}$, do đó u, v là nghiệm của phương trình

$X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \\ X = 3 \end{array}\right.$. Suy ra $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{13 + 2x} = -1 \Leftrightarrow x = -7$

Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{13 + 2x} = 3 \Leftrightarrow x = 7$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 7$.

b) $x + \sqrt[3]{4 - x^3} = 2 + 3x\sqrt[3]{4 - x^3}$

Đặt $y = \sqrt[3]{4 - x^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 4$

Phương trình trở thành $x + y = 2 + xy$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 4 \\ x + y = 2 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 4 \\ x + y = 2 + xy \end{cases}$ (*)

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$, hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases} S^3 - 3SP = 4 \\ S = 2 + P \end{cases}$

$\begin{cases} S^3 - 3S(S - 2) = 4 \\ P = S - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3S^2 + 6S - 4 = 0 \\ P = S - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -1 \end{cases}$

Thay vào ta có $\begin{cases} 1 = x + y \\ -1 = xy \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình

$X^2 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Do đó phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

c) Phương trình tương đương với

$-25x^3 + 15\sqrt{3(x^2 + 2)}x^2 + 6\sqrt{3(x^2 + 2)} - 36x = 2$

$\Leftrightarrow x^3 + \left(-26x^3 + 15\sqrt{3(x^2 + 2)}x^2 + 6\sqrt{3(x^2 + 2)} - 36x\right) = 2$

$\Leftrightarrow x^3 + \left(\sqrt{3(x^2 + 2)} - 2x\right)^3 = 2$

Đặt $y=\sqrt{3\left(x^2+2\right)}-2x \Rightarrow \left(2x+y\right)^2=3\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2+4xy+y^2=6$

Phương trình trở thành $x^3+y^3=2$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ x^2+4xy+y^2=6 \end{cases}$, đây là hệ đối xứng loại 1 giải hoàn toàn tương tự trên ta được nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau

a) $x^2-x+1=\sqrt{1-8x}$ b) $x^2+3x+3=2\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\le\dfrac{1}{8}$

Đặt $\sqrt{1-8x}=1-2y, y\le\dfrac{1}{2} \Rightarrow 1-8x=4y^2-4y+1 \Leftrightarrow y^2+2x=y$

Phương trình trở thành $x^2-x+1=1-2y \Leftrightarrow x^2+2y=x$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} y^2+2x=y \\ x^2+2y=x \end{cases}$ (*)

$\Rightarrow x^2-y^2+2y-2x=x-y \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x+y-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=3-y \end{array}\right.$

Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình (*):

Với $x=y$ ta có $y^2+2y=y \Leftrightarrow y^2+y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=0 \\ y=-1 \Rightarrow x=-1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $x=3-y$ ta có $y^2+2\left(3-y\right)=y \Leftrightarrow y^2-3y+6=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-1$.

b) ĐKXĐ: $x\ne0$.

Phương trình tương đương với $x^3+3x^2+3x=2\sqrt[3]{2x+3} \Leftrightarrow \left(x+1\right)^3-1=2\sqrt[3]{2\left(x+1\right)+1}$

Đặt $y=x+1$ phương trình trở thành $y^3-2=2\sqrt[3]{2y+1}$, đặt $t=\sqrt[3]{2y+1} \Rightarrow y=\dfrac{t^3-1}{2}$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} y^3 - 1 = 2t & (1) \\ t^3 - 1 = 2y & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta có: $y^3 - t^3 = 2t - 2y$

$\Leftrightarrow (y - t)(y^2 + yt + t^2) + 2(y - t) = 0$

$\Leftrightarrow (y - t)(y^2 + yt + t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow y - t = 0$

(Vì $y^2 + yt + t^2 + 2 = \left(y + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + 2 > 0$)

Với $t = y$ thay vào (1) ta có $y^3 - 1 = 2y \Leftrightarrow y^3 - 2y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = -2 \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = -2; x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Nhận xét:

- Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = \sqrt{a'x + b'}$ ta đặt $\sqrt{a'x + b'} = \alpha y + \beta \Rightarrow \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y - a'x + \beta - b' = 0$ và phương trình trở thành $ax^2 + bx + c - \alpha y - \beta = 0$. Từ đó ta chọn α, β sao cho hệ phương trình $\begin{cases} \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y - a'x + \beta - b' = 0 \\ ax^2 + bx + c - \alpha y - \beta = 0 \end{cases}$ là đối xứng. Hoàn toàn tương tự đối với phương trình chứa căn bậc n.
- Khi gặp phương trình có thể đưa về dạng $f^n(x) + b = a\sqrt[n]{af(x) - b}$ ta đưa về hệ đối xứng loại 2 bằng cách đặt $t = f(x)$, $y = \sqrt[n]{af(x) - b}$ ta có hệ $\begin{cases} t^n + b = ay \\ y^n + b = at \end{cases}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 + 5 + \sqrt{3x+1} = 13x$ b) $10x^2 + 12x + 3 = x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq -\dfrac{1}{3}$

Phương trình tương đương với $\left(3-2x\right)^2 + \sqrt{3x+1} = x+4$

Đặt $\begin{cases} u = 3-2x \\ \sqrt{3x+1} = v \end{cases}, v \geq 0, u \leq \dfrac{11}{3} \Rightarrow v^2 + u = x+4$

Phương trình trở thành $u^2 + v = x+4$ (*)

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} v^2 + u = x+4 \\ u^2 + v = x+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(v^2+u\right) - \left(u^2+v\right) = 0 \Leftrightarrow \left(v-u\right)\left(u+v-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = u \\ v = 1-u \end{array}\right.$

Với $v = u$ thay vào (*) ta có $u^2 + u = x+4$ hay $\left(3-2x\right)^2 + 3 - 2x = x+4$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15 \pm \sqrt{97}}{8}$(loại $x = \dfrac{15+\sqrt{97}}{8}$ vì khi đó $v = u < 0$)

Với $v = 1-u$ thay vào (*) ta có $u^2 + 1 - u = x+4$ hay $\left(3-2x\right)^2 + 1 - \left(3-2x\right) = x+4$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{73}}{8}$ (loại $x = \dfrac{11-\sqrt{73}}{8}$ vì $v = 1 - \left(3-2x\right) < 0$)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$ và $x = \dfrac{11-\sqrt{73}}{8}$.

b) Phương trình tương đương với $(3x+2)^2 + x^2 - 1 = x\sqrt{x(3x+2) - x^2 + 1}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x(3x+2) - x^2 + 1} \\ v = 3x+2 \end{cases}$, $u \geq 0$ suy ra $u^2 = xv - x^2 + 1$

Phương trình trở thành $v^2 + x^2 - 1 = xu$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^2 = xv - x^2 + 1 \\ v^2 + x^2 - 1 = xu \end{cases}$

$\Rightarrow u^2 - v^2 - x^2 + 1 = xv - x^2 + 1 - xu \Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(u+v+x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u+v+x = 0 \end{array}\right.$

Với $u = v$ ta có $v^2 = xv - x^2 + 1$ hay $\left(3x+2\right)^2 = x\left(3x+2\right) - x^2 + 1$

$\Leftrightarrow 7x^2+10x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$ (loại $x=-1$ vì khi đó $u=v=-1<0$)

Với $u+v+x=0 \Rightarrow u=-x-v=-4x-2$ ta có $\left(-4x-2\right)^2=x\left(3x+2\right)-x^2+1$

$\Leftrightarrow 14x^2+14x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7}}{14}$(loại $x=\dfrac{-7+\sqrt{7}}{14}$ vì khi đó $u<0$)

Vậy phương trình có hia nghiệm là $x=-1$ và $x=\dfrac{-7-\sqrt{7}}{14}$.

Chú ý: Đây là phương trình bằng sau khi đặt $u=f\left(x\right),\ v=g\left(x\right)$ đưa về hệ hương trình còn ẩn x mà có thể đưa về phương trình tích. Sau khi tìm được nghiệm cần tìm u,v để kiểm tra xem có thỏa mãn điều kiện ẩn phụ hay không.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{2}.\sqrt{3-2x^3}=\sqrt[3]{3-x^2}$ b) $2x+\sqrt[3]{9-x^3}=\sqrt{3x^2+13}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\le\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

Đặt $y=\sqrt{3-2x^3},\ y\ge 0 \Rightarrow 2x^3+y^2=3$

Phương trình trở thành $\sqrt[3]{2}y=\sqrt[3]{3-x^2} \Leftrightarrow 2y^3+x^2=3$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+y^2=3\ (1) \\ 2y^3+x^2=3\ (2) \end{cases} \Rightarrow 2x^3-2y^3+y^2-x^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(2x^2+2xy+2y^2-x-y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=y \\ 2x^2+2xy+2y^2-x-y=0 \end{array}\right.$ (*)

Ta có $2x^2+2xy+2y^2-x-y>0,\ \forall x,\forall y$, thật vậy

Nếu $x\ge 1$ thì $2x^2+2xy+2y^2-x-y=x\left(2x-1\right)+y\left(2x-1\right)+2y^2>0$

Nếu $0<x<1 \Rightarrow 1<y<\sqrt{3}$ thì $2x^2+2xy+2y^2-x-y=2x^2+x\left(2y-1\right)+y\left(2y-1\right)>0$

Nếu $x\le 0 \Rightarrow y\ge\sqrt{3}$ thì $2x^2+2xy+2y^2-x-y=x^2+\left(x+y\right)^2-x+y\left(y-1\right)>0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x=y$, thay vào phương trình (1) ta được $2x^3+x^2=3 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-3=0 \Leftrightarrow x=1$

Suy ra phương trình có nghiệm $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Đặt $\sqrt[3]{9-x^3}=y\Rightarrow x^3+y^3=9$

Phương trình trở thành $2x+y=\sqrt{3x^2+13}\Rightarrow\left(2x+y\right)^2=3x^2+13\Leftrightarrow x^2+y^2+4xy=13$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=9\\x^2+y^2+4xy=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=9\\\left(x+y\right)^2+2xy=13\end{cases}$ (**)

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$, $S^2\ge 4P$, hệ phương trình (**) trở thành $\begin{cases}S^3-3SP=9\\S^2+2P=13\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2S^3-3S\left(13-S^2\right)=18\\2P=13-S^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5S^3-39S-18=0\\2P=13-S^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(S-3\right)\left(5S^2+15S+6\right)=0\\2P=13-S^2\end{cases}$ (***)

Ta có $S^2\ge 4P\Rightarrow S^2\ge 2\left(13-S^2\right)\Rightarrow S^2\ge\dfrac{26}{3}$

Mặt khác $5S^2+15S+6=\left(2S+\dfrac{15}{4}\right)^2+S^2+6-\dfrac{225}{16}\ge\dfrac{26}{3}+6-\dfrac{225}{16}>0$

Do đó hệ phương trình (***) $\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\P=2\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}3=x+y\\2=xy\end{cases}$, x,y là nghiệm của phương trình

$X^2-3X+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=1\\X=2\end{array}\right.$

Suy ra hệ phương trình (**) có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $\left(1;2\right)$ và $\left(2;1\right)$.

Thử $x=1,x=2$ vào thấy thỏa mãn phương trình

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1,x=2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.70: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(3x-1\right)^2}+\sqrt[3]{9x^2-1}=1$ b) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$

Bài 3.71: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$ b) $4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}$

c) $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

Bài 3.72: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2-x^2}=(2-\sqrt{x})^2$ b) $\sqrt[3]{2-x^2}=\sqrt{2-x^3}$.

Bài 3.73: Giải phương trình: $(4x^3 - x + 3)^3 - x^3 = \frac{3}{2}(1)$

Bài 3.74: Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x - 2$ b) $x^2 - 3x + 4 = x\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x - 1}$

.