DẠNG TOÁN 4: BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $\left|\sin\alpha\right| \le 1$, $\left|\cos\alpha\right| \le 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2\cot^2\alpha \ge 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot\alpha \ge 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) \ge 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 \ge 1 - \sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha \ge 2 \Leftrightarrow \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 \ge 0$$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2\alpha - 1\right)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ge \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ge \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \quad (*)$$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha > 0 \end{cases}$ nên

$(*) \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha \ge \sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 \ge \sin 2\alpha$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha + \frac{1}{2\sin\alpha}\right) \ge 2$

Lời giải

Ta có $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2\sin\alpha}\right)=\sin\alpha\cos\alpha+\dfrac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}+1$

Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha\cos\alpha>0$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha.\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}}=1$$

Suy ra $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2\sin\alpha}\right)\geq 2$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0\leq\alpha\leq\pi$ thì

$$\left(2\cos2\alpha-1\right)^2-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>\left(\sqrt{2\sin\alpha}-2\right)\left(3-2\cos2\alpha\right).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow\left(2\cos2\alpha-1\right)^2-2\left[1-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]+2\left(3-2\cos2\alpha\right)>\sqrt{2\sin\alpha}\left[3-2\left(1-2\sin^2\alpha\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2\alpha-8\cos2\alpha+5+2\sin\alpha>\sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1-\cos2\alpha\right)^2+1+2\sin\alpha>\sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^4\alpha+2\sin\alpha+1>\sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha+1\right)$$

Đặt $\sqrt{2\sin\alpha}=t$, vì $0\leq\alpha\leq\pi\Rightarrow 0\leq t\leq\sqrt{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $t^8+t^2+1>t\left(t^4+1\right)\Leftrightarrow t^8-t^5+t^2-t+1>0$ (*)

+ Nếu $0\leq t<1$: (*) $\Leftrightarrow t^8+t^2\left(1-t^3\right)+1-t>0$ đúng vì $1-t>0$, $1-t^3>0$, $t^2\geq0$ và $t^8\geq0$

.

+ Nếu $1 \le t \le \sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow t^5\left(t^3-1\right)+t\left(t-1\right)+1>0$ đúng vì $t^5\left(t^3-1\right) \ge 0, t\left(t-1\right) \ge 0$.

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A=\sin x+\cos x$ b) $B=\sin^4 x+\cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

Vì $\sin 2x \le 1$ nên $A^2=1+\sin 2x \le 1+1=2$ suy ra $-\sqrt{2} \le A \le \sqrt{2}$.

Khi $x=\frac{\pi}{4}$ thì $A=\sqrt{2}$, $x=-\frac{3\pi}{4}$ thì $A=-\sqrt{2}$

Do đó $\max A=\sqrt{2}$ và $\min A=-\sqrt{2}$.

b) Ta có $B=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}+\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{2+1+\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x$$

Vì $-1 \le \cos 4x \le 1$ nên $\frac{1}{2} \le \frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x \le 1$ suy ra $\frac{1}{2} \le B \le 1$.

Vậy $\max B=1$ khi $\cos 4x=1$ và $\min B=\frac{1}{2}$ khi $\cos 4x=-1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A=2-2\sin x-\cos 2x$

Lời giải

Ta có $A=2-2\sin x-\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^2 x-2\sin x+1$

Đặt $t=\sin x, \left|t\right| \le 1$ khi đó biểu thức trở thành $A=2t^2-2t+1$

Xét hàm số $y=2t^2-2t+1$ với $\left|t\right| \le 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5	$\searrow$ $\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = 1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 6.53: Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\tan x + \cot x \geq 2$

Bài 6.54: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $B = \cos 2x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$

Bài 6.55: Chứng minh rằng $\cos x\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 2}\right) \leq \sqrt{3}$

Bài 6.56: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\sin x + \sin 2x$.

Bài 6.57: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sin\frac{A}{2}\sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

✍ **DẠNG TOÁN 5**: **CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

Lời giải

a) $VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

Mặt khác trong tam giác ABC ta có $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Suy ra $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2},\ \sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A+B}{2}$

Vậy $VT=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$=4\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $VT=\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C=2-\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$

Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos(A+B)=-\cos C$ nên

$VT=2+\cos C\cos(A-B)+\cos C\cos(A+B)=2+\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$

$=2+\cos C.2\cos A\cos B=2(1+\cos A\cos B\cos C)=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

c) $VT=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos C=-\cos(A+B),\ \sin(A+B)=\sin C$ nên

$VT=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)=2\sin C\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$

$=2\sin C.\left[-2\sin A\sin(-B)\right]=4\sin A\sin B\sin C=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

b) $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A+\tan B=\tan A.\tan B.\tan C-\tan C$

$\Leftrightarrow\tan A+\tan B=\tan C(\tan A\tan B-1)\quad(*)$

Do tam giác ABC không vuông nên $A+B\neq\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\tan A\tan B-1=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-1=\dfrac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=-\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}\neq 0$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan C\Leftrightarrow\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C\Leftrightarrow\tan(A+B)=-\tan C$

Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cot(A+B)=-\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot\left(A+B\right)=\frac{1}{\tan\left(A+B\right)}=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\dfrac{1}{\cot A\cot B}}{\dfrac{1}{\cot A}+\dfrac{1}{\cot B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

Suy ra $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C\Rightarrow \cot A\cot B-1=-\cot C\left(\cot A+\cot B\right)$

Hay $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$

b) $\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$

c) $\tan A\tan B\tan C\ge 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

a) Ta có $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos C$

Vì $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ nên $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

Mặt khác $\cos C=1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$ do đó

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-2\sin\frac{C}{2}.\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$=-2\left(\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

Vì $\left|\cos\dfrac{A-B}{2}\right|\le 1\Rightarrow\cos^2\dfrac{A-B}{2}\le 1$ nên

$\cos A+\cos B+\cos C \le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow$ ĐPCM.

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$ thì $\frac{\sin x+\sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$.

Thật vậy, do $0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi \Rightarrow \sin\frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos\frac{x-y}{2} \le 1$ nên

$$\frac{\sin x+\sin y}{2}=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$$

Áp dụng bổ đề ta có: $\frac{\sin A+\sin B}{2} \le \sin\frac{A+B}{2},\ \frac{\sin C+\sin\frac{\pi}{3}}{2} \le \sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}$

Suy ra

$$\frac{\sin A+\sin B}{2}+\frac{\sin C+\sin\frac{\pi}{3}}{2} \le \sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \le 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$$

Do đó $\sin A+\sin B+\sin C \le 3\sin\frac{\pi}{3}$ hay $\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{3}$ ĐPCM.

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A>0,\ \tan B>0,\ \tan C>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\tan A+\tan B+\tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$

Theo ví dụ 2 ta có $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ nên

$$\tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}\left(\sqrt[3]{\left(\tan A\tan B\tan C\right)^2}-3\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\left(\tan A\tan B\tan C\right)^2} \ge 3 \Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt{3}$$ ĐPCM.

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A+\sin B+\sin C \le \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\tan A+\tan B+\tan C \ge \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ Với tam giác ABC không vuông.

Lời giải

a) Vì $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}>0$ và $\cos\frac{A-B}{2}\le 1$ nên

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sin B+\sin C\le 2\cos\frac{A}{2}$, $\sin C+\sin A\le 2\cos\frac{B}{2}$

Công vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$\sin A+\sin B+\sin C\le \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$. ĐPCM.

b) +TH1: Nếu tam giác ABC tù: không mất tính tổng quát giả sử $A>\frac{\pi}{2}\Rightarrow B<\frac{\pi}{2}, C<\frac{\pi}{2}$ suy ra

$\cos A<0$, $\cos B>0$, $\cos C>0$

$\cos A\cos B\cos C<0$. Mà $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$ do đó bất đẳng thức luôn đúng.

+ TH2: Nếu tam giác ABC nhọn: $\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos\ \ A+B\ \ +\cos\ \ A-B\ \ \right]$.

Vì $\cos\ \ A+B\ \ =-\cos C$ và $\cos\ \ A-B\ \ \le 1$ nên $\cos A\cos B\le\frac{1}{2}\ \ 1-\cos C\ \ =\sin^2\frac{C}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\cos B\cos C\le\sin^2\frac{A}{2}$, $\cos C\cos A\le\sin^2\frac{B}{2}$.

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$\cos A\cos B\ \ \ \cos B\cos C\ \ \ \cos C\cos A\ \ \le\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ĐPCM.

c) Ta có $\tan A+\tan B=\dfrac{\sin\ \ A+B}{\cos A\cos B}=\dfrac{2\sin\ \ A+B}{\cos\ \ A+B\ \ +\cos\ \ A-B}$

Mà $\sin\ \ A+B\ \ =\sin C$, $\cos\ \ A+B\ \ =-\cos C$ nên

$$\tan A+\tan B=\frac{2\sin C}{-\cos C+\cos\ \ A-B}\ge\frac{2\sin C}{1-\cos C}=\frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}}=2\cot\frac{C}{2}$$

Tương tự ta có $\tan B+\tan C\ge 2\cot\frac{A}{2}$, $\tan C+\tan A\ge 2\cot\frac{B}{2}$

Công vế với vế và rút gọn ta được

$\tan A+\tan B+\tan C\ge\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ ĐPCM.

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x+y+z\ge a+b+c$ ta có thể đi chứng minh $x+y\ge 2a$ (hoặc $2b$, $2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz\ge abc$ với x,y,z,a,b,c không âm ta đi chứng minh $xy\ge a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le 3\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

b) $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right)\ge\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x+y\le\sqrt{2\ \ x^2+y^2}$ với mọi x,y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}\le\sqrt{2\ \ \sin A+\sin B\ }=\sqrt{2.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\le 2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}$$

Tương tự ta có $\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 2\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}$

Cộng vế với vế ta được $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 2\left(\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)$

Mà $\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\le 2\sqrt{\sin\left[\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right]}=2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}$

Suy ra $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 4\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}$

Hay $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le 3\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ĐPCM.

b) Ta có $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với mọi x,y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\ge\frac{4}{\sin A+\sin B}=\frac{4}{2\sqrt{\sin A\sin B}}=\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}$$

Do đó $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\ge 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}+\frac{1}{\sin A\sin B}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2$

Mặt khác

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}\left[\cos\ \ A+B\ \ -\cos\ \ A-B\ \ \right]=\frac{1}{2}\left[\cos\ \ A+B\ \ +\cos\ \ A-B\ \ \right]$$
$$\ge\frac{\cos\ \ A+B\ \ +1}{2}=\sin^2\frac{A+B}{2}$$

Nên $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right)\ge\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\right)^2$ (1)

Tương tự ta có $\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)\ge\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)}\right)^2$ (2)

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

Ta lại có $\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)}\right)\ge\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{1}{2}\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2=\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)^2$

Suy ra $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)\ge\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)^4$

Hay $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right)\ge\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\right)^3=\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$ ĐPCM.

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f\ \ A\ \ +f\ \ B\ \ +f\ \ C\ \ \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh

$$f\ \ A\ \ +f\ \ B\ \ \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

khi đó $f\ \ C\ \ +f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 2f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f\ \ A\ \ +f\ \ B\ \ +f\ \ C\ \ +f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 2\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right]\geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f\ \ A\ \ +f\ \ B\ \ +f\ \ C\ \ \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f\ \ A\ \ f\ \ B\ \ f\ \ C\ \ \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f\ \ A\ \ f\ \ B\ \ \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f\ \ C\ \ f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f\ \ A\ \ f\ \ B\ \ f\ \ C\ \ f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f\ \ A\ \ f\ \ B\ \ f\ \ C\ \ \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos\frac{A}{2}\cos(B-C)+\cos A\cos\frac{B-C}{2}=0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B+\cos 2C\leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos\frac{A}{2}\left(2\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right)+\cos\frac{B-C}{2}\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)-\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1\right)=0\ (1)$$

Vì $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}>0$, $-\frac{\pi}{2}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{B-C}{2}>0$ và

$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$ nên $(1)\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=1\Leftrightarrow\sin B+\sin C=1$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$ suy ra $\sin^2 B+\sin^2 C\ge\frac{(\sin B+\sin C)^2}{2}=\frac{1}{2}$

Do đó $\cos 2y+\cos 2z=2-2\left(\sin^2 y+\sin^2 z\right)\le 2-2.\frac{1}{2}=1$ ĐPCM.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Do A,B,C bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử $A\ge B\ge C\Rightarrow\frac{\pi}{2}>\frac{A}{2}\ge\frac{B}{2}\ge\frac{C}{2}>0$

Suy ra $\sin\frac{A}{2}\ge\sin\frac{B}{2}\ge\sin\frac{C}{2}>0,\cos\frac{A}{2}\ge\cos\frac{B}{2}\ge\cos\frac{C}{2}>0$

$$\Rightarrow\left(\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Do đó $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

Mà $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\ge 2\sqrt{\frac{3}{4}\cos^2\frac{B}{2}}=\sqrt{3}\cos\frac{B}{2},\ 3\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\ge 2\sqrt{3\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}}=2\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

Suy ra $2\left(\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\right)+\left(3\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)\ge 2\sqrt{3}\cos\frac{B}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

Hay $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\le\frac{3}{2}+3\left(\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)=\frac{9}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ĐPCM.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 6.58: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin C=\sin A.\cos B+\sin B.\cos A$

b) $\frac{\sin C}{\cos A.\cos B}=\tan A+\tan B\ (A,B\ne 90^0)$

c) $\cot B+\frac{\cos C}{\sin B.\cos A}=\cot C+\frac{\cos B}{\sin C.\cos A}\quad (A\ne 90^o)$

d) $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

e) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Bài 6.59: Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a) $\tan A+\tan B+\tan C\ \ge 3\sqrt{3},\ \forall\Delta ABC$ nhọn

b) $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9, \forall \Delta ABC$ nhọn

c) $\tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81, \forall \Delta ABC$ nhọn

d) $\tan^2 \dfrac{A}{2} + \tan^2 \dfrac{B}{2} + \tan^2 \dfrac{C}{2} \geq 1$

e) $\tan \dfrac{A}{2} + \tan \dfrac{B}{2} + \tan \dfrac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

Bài 6.70: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$1 + \cos A \cos B \cos C \geq \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

Bài 6.71: Cho ΔABC. Chứng minh rằng $2\sin A + 3\sin B + 4\sin C \leq 5\cos\dfrac{A}{2} + 3\cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}$.

Bài 6.72: Cho ΔABC. Chứng minh rằng $x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2 - 2\cos A \geq 0 \quad \forall x$.
Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 6.73: Cho ΔABC nhọn . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$(\tan B + \tan C)x^2 - 4x + 2\tan\dfrac{A}{2} \geq 0 \quad \forall x$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?