## DẠNG 4: Nhận dạng tam giác

**1. Phương pháp giải.**

Sử dụng định lí côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

**2. Các ví dụ.**

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $\sin C = 2\sin B\cos A$. Chứng minh minh rằng tam giác $ABC$ cân .

***Lời giải***

Áp dụng định lí côsin và sin ta có:

$$\sin C = 2\sin B\cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2.\frac{b}{2R}.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác $ABC$ cân tại đỉnh C.

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác $ABC$ thoả mãn $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ . Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông.

***Lời giải***

Ta có: $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R}\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \frac{b + c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0$$

$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

***Ví dụ 3:*** Nhận dạng tam giác $ABC$ trong các trường hợp sau:

a) $a.\sin A + b\sin B + c\sin C = h_a + h_b + h_c$

b) $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

***Lời giải***

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a.\sin A + b\sin B + c\sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a.\frac{2S}{bc} + b.\frac{2S}{ca} + c.\frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác $ABC$ đều

b) Ta có: $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4\sin^2 A\sin^2 B$$

$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 2.85:** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh tam giác $ABC$ cân nếu $h_a = c.\sin A$

**Bài 2.86:** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh tam giác $ABC$ cân nếu $4m_a^2 = b\ \ b + 4c.\cos A$

**Bài 2.87:** Chứng minh rằng tam giác $ABC$ đều khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$

**Bài 2.88:** Cho tam giác $ABC$. Tìm góc A trong tam giác biết các cạnh a, b, c thoả mãn hệ thức:

$b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2), (b \neq c)$.

**Bài 2.89:** Cho $\Delta ABC$ thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \\ a = 2b\cos C \end{cases}$. Chứng minh rằng $\Delta ABC$ đều.

**Bài 2.90:** Trong tam giác $ABC$, chứng minh rằng nếu diện tích tính theo công thức

$S = \frac{1}{4}\ \ a + b - c\ \ \ a - b + c$ thì tam giác ABC đều.

**Bài 2.91:** Cho $\Delta ABC$ thỏa mãn: $\dfrac{1 + \cos B}{\sin B} = \dfrac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ là tam giác cân.

**Bài 2.92:** Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông tại A hoặc B khi và chỉ khi $\sin C = \cos A + \cos B$.

**Bài 2.93:** Cho tam giác $ABC$ có hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau và có $R.r = \dfrac{bc}{2\ \ 1 + \sqrt{10}}$. Chứng mình rằng tam giác $ABC$ cân

**Bài 2.94:** Chứng minh rằng tam giác $ABC$ đều khi và chỉ khi $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{\sqrt{ab}}{4c}$.

**Bài 2.95:** Chứng minh rằng tam giác $ABC$ cân tại tại B khi và chỉ khi $p\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} = p - c$.