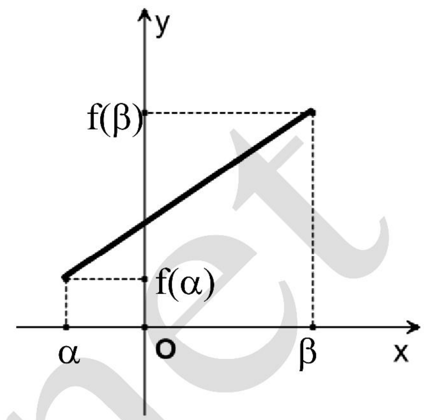
- **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT**.

1. Phương pháp giải.

Cho hàm số $f\left(x\right)=ax+b$ và đoạn $\left[\alpha;\beta\right]\subset\mathbb{R}$. Khi đó, đồ thị của hàm số y = f(x) trên $[\alpha;\beta]$ là một đoạn thẳng nên ta có một số tính chất:



- $\max\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) = \max\{f(\alpha); f(\beta)\}$,
- $\min\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) = \min\{f(\alpha); f(\beta)\}$,
- $\max\limits_{[\alpha,\beta]}\left|f(x)\right| = \max\left\{\left|f(\alpha)\right|;\left|f(\beta)\right|\right\}$.

Áp dụng các tính chất đơn giản này cho chúng ta cách giải nhiều bài toán một cách thú vị, ngắn gọn, hiệu quả.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|2x-m\right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên $\left[1;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Dựa vào các nhận xét trên ta thấy $\max\limits_{[1;2]} f(x)$ chỉ có thể đạt được tại $x=1$ hoặc $x=2$.

Như vậy nếu đặt M = $\max\limits_{[1;2]} f(x)$ thì $M\ge f\left(1\right)=\left|2-m\right|$ và $M\ge f\left(2\right)=\left|4-m\right|$.

Ta có

$$M\ge\frac{f(1)+f(2)}{2}=\frac{\left|2-m\right|+\left|4-m\right|}{2}\ge\frac{\left|(2-m)+(m-4)\right|}{2}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\left|2-m\right|=\left|4-m\right|\\(2-m)(m-4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1, đạt được chỉ khi m = 3.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\left|\sqrt{2x-x^2}-3m+4\right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $A=\max y$. Ta đặt $t=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow t=\sqrt{1-\left(x-1\right)^2}$ do đó $0\le t\le 1$

Khi đó hàm số được viết lại là $y=\left|t-3m+4\right|$ với $t\in\left[0;1\right]$ suy ra

$$A=\max\limits_{[0,1]}\left|t-3m+4\right|=\max\left\{\left|-3m+4\right|,\left|5-3m+\right|\right\}\ge\frac{\left|-3m+4\right|+\left|5-3m\right|}{2}$$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có

$\left|-3m+4\right|+\left|5-3m\right|=\left|3m-4\right|+\left|5-3m\right|\ge 1$

Do đó $A\ge\frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra $m=\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c thuộc $\left[0;2\right]$. Chứng minh rằng: $2\left(a+b+c\right)-\left(ab+bc+ca\right)\le 4$

Lời giải

Viết bất đẳng thức lại thành $2-b-c\ a+2\ b+c\ -bc-4\le 0$

Xét hàm số bậc nhất $f\ a\ =\ 2-b-c\ a+2\ b+c\ -bc-4$ với ẩn $a\in\left[0;2\right]$

Ta có: $f\ 0\ =2\ b+c\ -bc-4=-\ 2-b\ \ 2-c\ \le 0$

$f\ 2\ =\ 2-b-c\ 2+2\ b+c\ -bc-4=-bc\le 0$

Suy ra $f\ a\ \le max\ \ f\ 0\ ;f\ 2\ \ \le 0$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho các số thực không âm $x,\ y,\ z$ thoả mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+xyz\ge 4$.

Lời giải

Bất đẳng thức t\ưng đương với $(y+z)^2-2yz+x^2+xyz\ge 4$

$\Leftrightarrow (3-x)^2+x^2+yz\ \ x-2\ \ -4\ge 0\Leftrightarrow yz(x-2)+2x^2-6x+5\ge 0$

Đặt $t=yz$, do $yz\ge 0$ và yz $\le\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2=\dfrac{(3-x)^2}{4}$ nên $t\in\left[0;\dfrac{(3-x)^2}{4}\right]$.

khi đó VT(2) là hàm số bậc nhất của biến t, $f(t)=(x-2)t+2x^2-6x+5$.

Để chứng minh bất đẳng thức (2) ta sẽ chứng minh $f\ 0\ \ge 0$ và $f\left(\dfrac{3-x\ ^2}{4}\right)\ge 0$.

Thật vậy, ta có $f\ 0\ =2x^2-6x+5=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{5}\ge 0$ và $f\left(\dfrac{3-x\ ^2}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\ x-1\ ^2\ \ x+2\ \ge 0$

nên bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.23: Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh $0\le xy+yz+zx-2xyz\le\dfrac{7}{27}$.

Bài 2.24: Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x+y+z=3\end{cases}$. Chứng minh $x^2+y^2+z^2+xyz\ge 4$.

Bài 2.25: Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh $x^3+y^3+z^3+6xyz\ge\dfrac{1}{4}$.

Bài 2.26: Cho $0\le a,b,c\le 1$. Chứng minh $a^2+b^2+c^2\le a^2b+b^2c+c^2a+1$.

Bài 2.27: Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh $x^2y+y^2z+z^2x\le\dfrac{4}{27}$.

Bài 2.28: Chứng minh rằng với $\forall m\le 1$ thì $x^2-2(3m-1)x+m+3\ge 0$ với $\forall x\in\left[1;+\infty\ \right.$.